ИНТЕЛЛЕКТ-КАРТА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ и ЕГЭ

ВЕРСИЯ К3

http://www.workingmemory.ru/

ОТКРЫТЬ

© Пигарев А.Ю.

Алгебра
Теория вероятностей
Последовательности
Стереометрия
Математика
Показательная функция и логарифмы
Планиметрия
Математический анализ
Тригонометрия

© Пигарев А.Ю.

ПЛАНИМЕТРИЯ
Параллельные и секущие
Координаты и векторы
Касательные и секущие
Правильные многоугольники
Окружность и круг
Четырехугольники
Треугольники произвольные
Треугольники особой формы

© Пигарев А.Ю.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Рекуррентная формула	$a_n = a_{n-1} + d$	$b_n = b_{n-1} \cdot q$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Сумма первых n членов прогрессии	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$	$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$
Основное свойство	$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$	$\lvert b_n \rvert = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$
Расчет разности/знаменателя	$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$	$q^{m-n} = \frac{b_m}{b_n}$

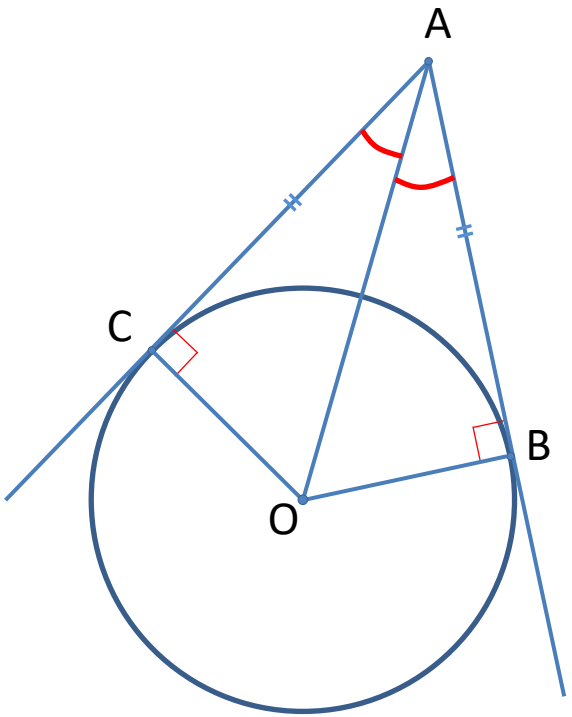
$\boldsymbol{d}$ – разность арифметической прогрессии;
$\boldsymbol{q}$ – знаменатель геометрической прогрессии.

© Пигарев А.Ю.

Касательные, проведенные из одной точки
Внешние и внутренние касательные
Вписанный угол
Касательные и секущие
Вневписанная окружность
Угол между хордой и касательной
Квадрат касательной

© Пигарев А.Ю.

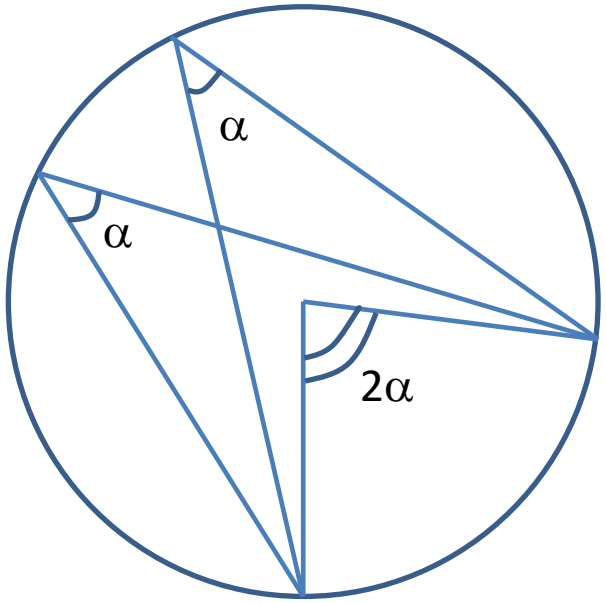
КАСАТЕЛЬНЫЕ, ПРОВЕДЕННЫЕ ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ



Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны: $AC = AB$, центр окружности O лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$.

© Пигарев А.Ю.

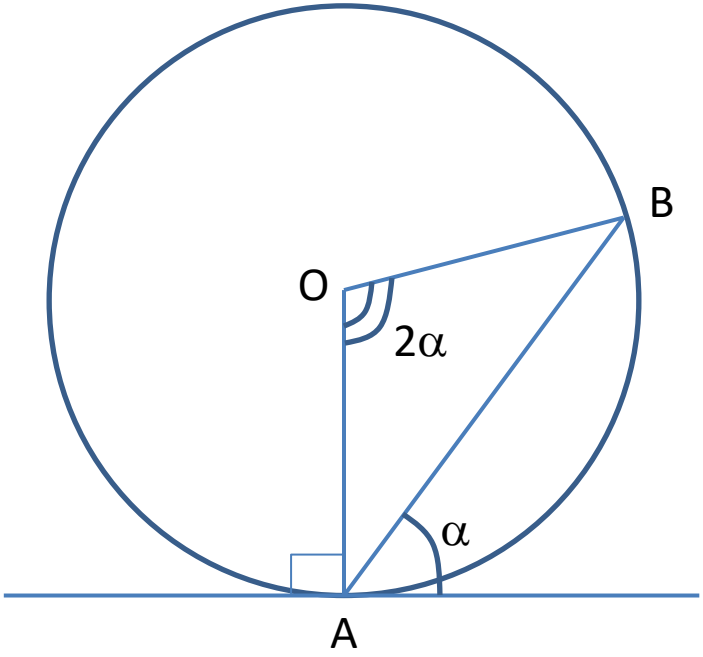
ВПИСАННЫЙ УГОЛ



Вписанный угол равен половине центрального (половине угловой меры дуги, на которую он опирается).

© Пигарев А.Ю.

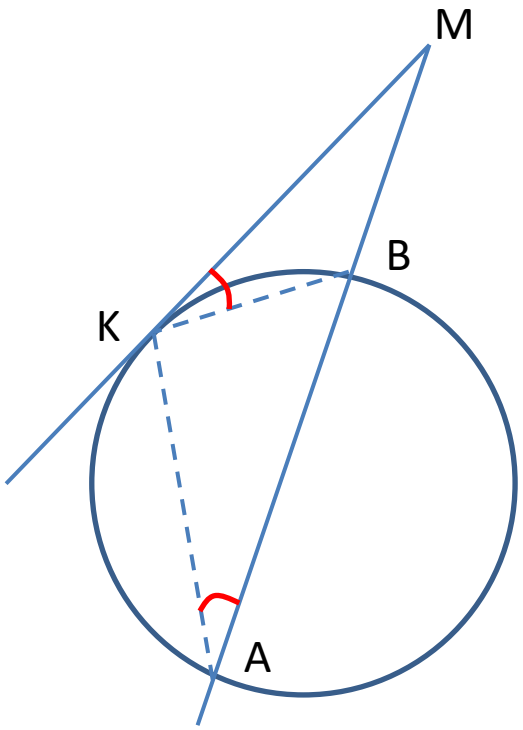
УГОЛ МЕЖДУ ХОРДОЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ



Угол между хордой и касательной, имеющих общую точку *A*, равен половине угловой меры дуги $\overset{\smile}{AB}$, заключенной между ними.

© Пигарев А.Ю.

КВАДРАТ КАСАТЕЛЬНОЙ



Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

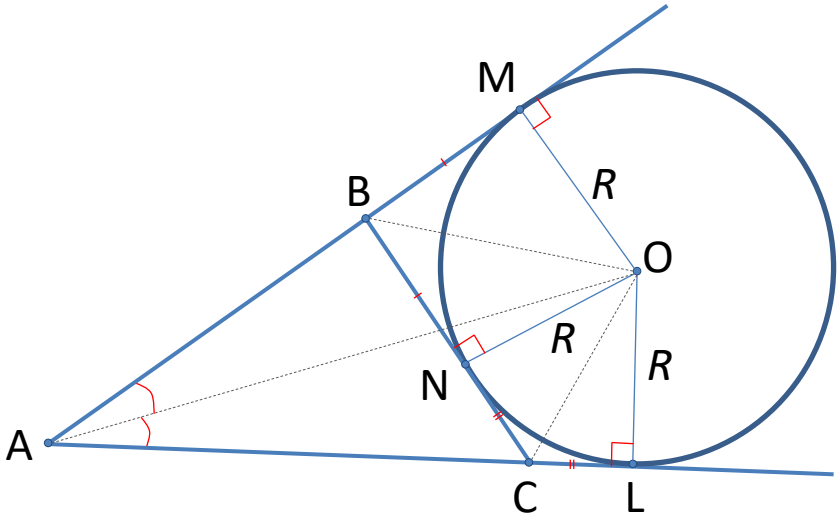
$$KM^2 = MB \cdot MA$$

Доказательство:

$$\angle KAB = \angle BKM \Rightarrow \Delta MKB \sim \Delta MAK \Rightarrow$$
$$\frac{KM}{MB} = \frac{MA}{KM} \Rightarrow KM^2 = MB \cdot MA$$

© Пигарев А.Ю.

ВНЕВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



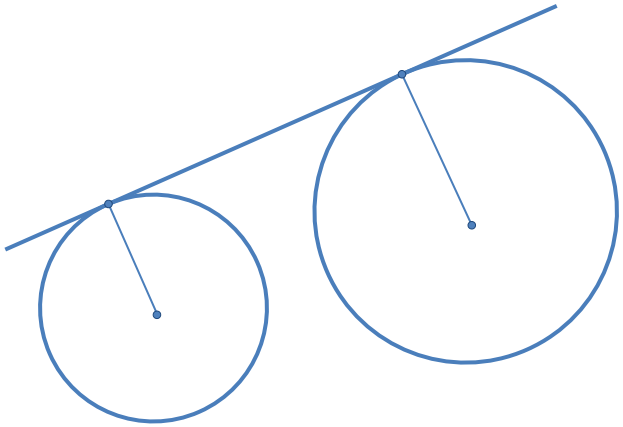
$$p = \frac{AB + AC + BC}{2}$$

$$AL = AM = p$$

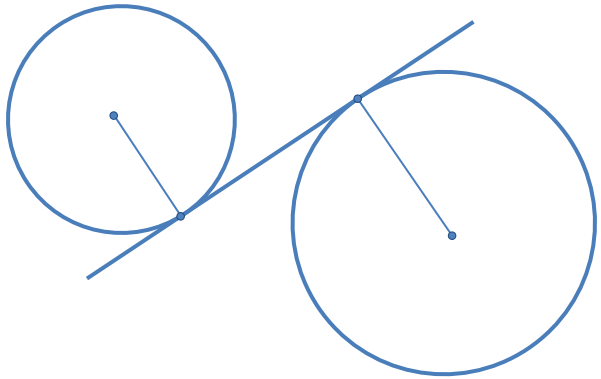
$$S_{ABC} = (p - BC) \cdot R$$

© Пигарев А.Ю.

ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ



Внешняя касательная
к двум окружностям



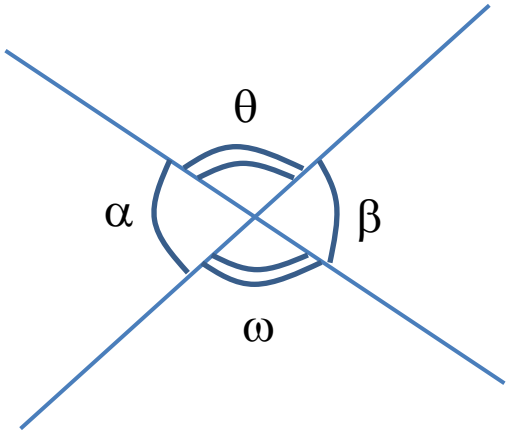
Внутренняя касательная
к двум окружностям

© Пигарев А.Ю.

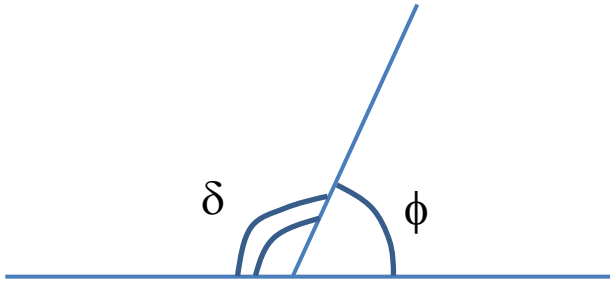
Смежные
и вертикальные углы
Параллельные
и секущие
Теорема Фалеса
Две параллельных
и секущая

© Пигарев А.Ю.

СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ



Вертикальные углы равны: $\omega = \theta$, $\beta = \alpha$



Сумма смежных углов равна 180°: $\phi + \delta = 180°$

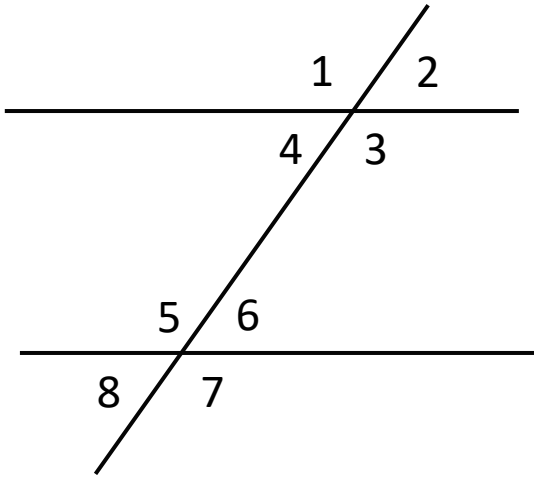
$$\sin\delta = \sin\phi \qquad \cos\delta = -\cos\phi \qquad \operatorname{tg}\delta = -\operatorname{tg}\phi \qquad \operatorname{ctg}\delta = -\operatorname{ctg}\phi$$

Косинус, тангенс и котангенс тупого угла отрицательны!

© Пигарев А.Ю.

ДВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И СЕКУЩАЯ

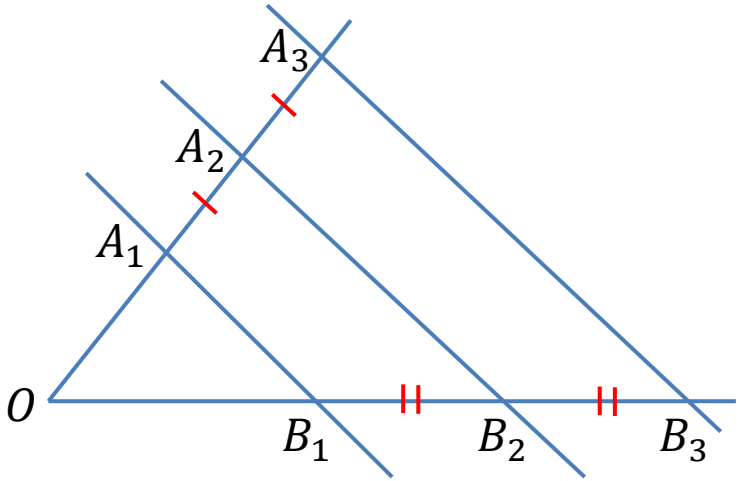
- ✓ Накрест лежащие углы (3 и 5, 4 и 6) равны.
- ✓ Сумма односторонних углов (4 и 5, 3 и 6) равна 180°.
- ✓ Соответственные углы (1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7) равны.



© Пигарев А.Ю.

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков ($A_1A_2 = A_2A_3$) и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки ($B_1B_2 = B_2B_3$).



Обобщённая теорема Фалеса:
Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки:

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$$

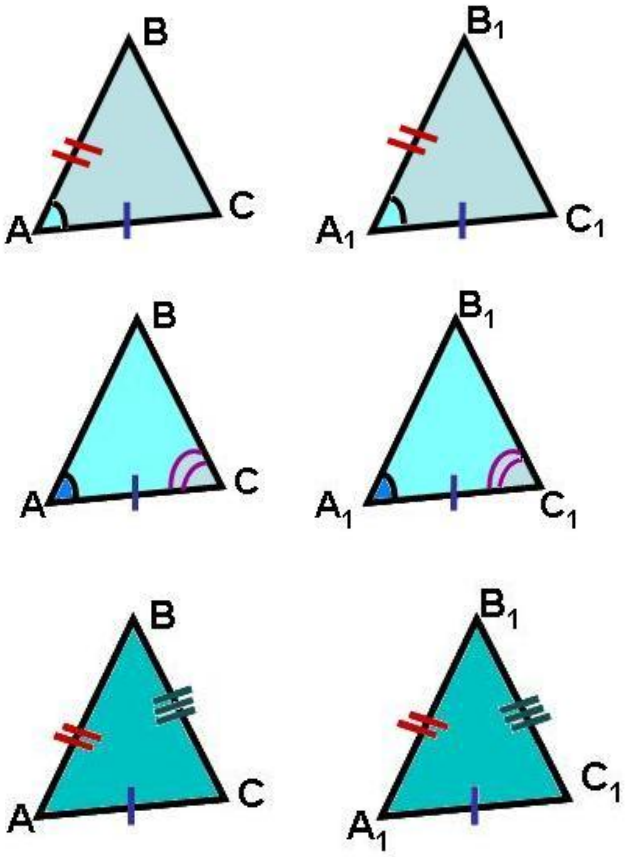
© Пигарев А.Ю.

Признаки равенства
Теорема Менелая
Признаки подобия
Серединные перпендикуляры
Треугольники произвольные
Стороны и площадь треугольника
Высоты
Средняя линия
Медианы
Биссектрисы

© Пигарев А.Ю.

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

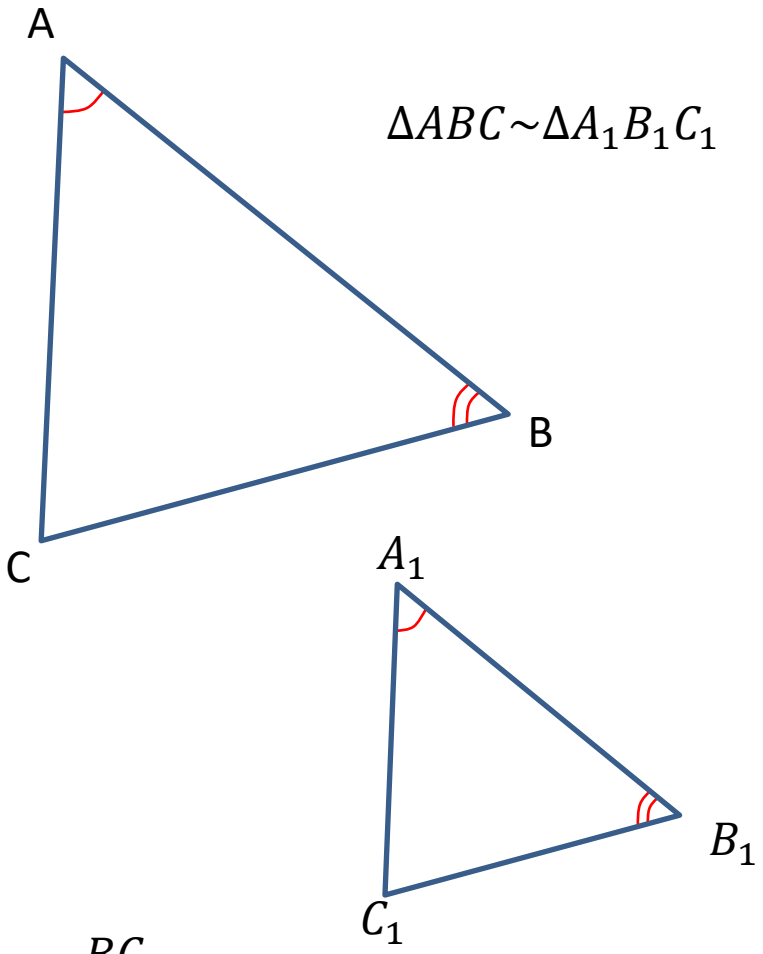
1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



© Пигарев А.Ю.

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны:
   $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$.
2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны:
   $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \angle A = \angle A_1$.
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны:
   $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.



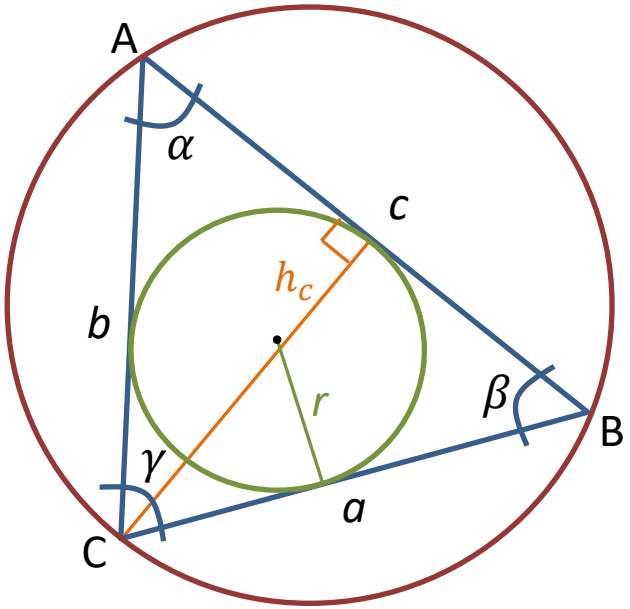
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

У подобных треугольников отношения соответственных сторон равны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$$

© Пигарев А.Ю.

СТОРОНЫ И ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ *– полупериметр*

R *– радиус описанной окружности*

r *– радиус вписанной окружности*

Пять формул площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}$$

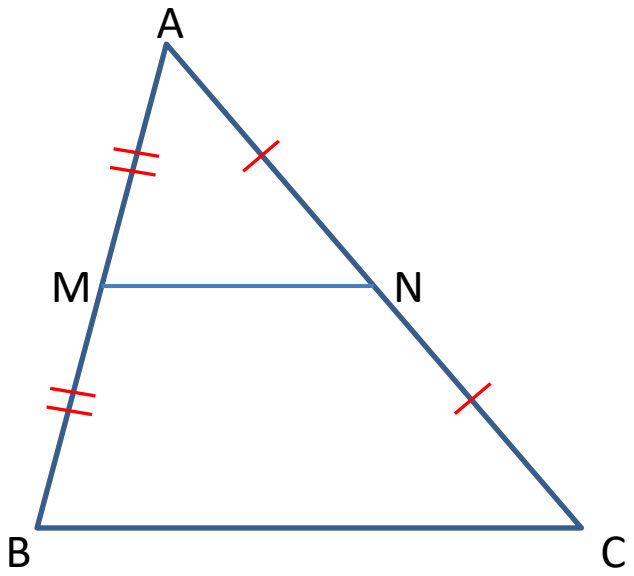
© Пигарев А.Ю.

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины его сторон.

Средняя линия параллельна основанию $(MN \parallel BC)$ и равна его половине:

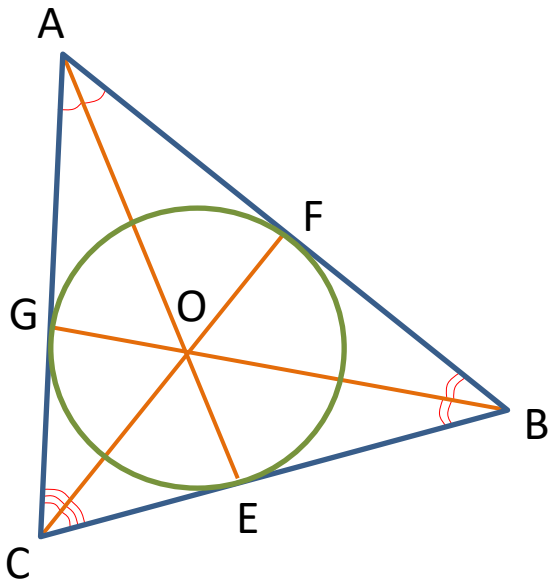
$$MN = \frac{BC}{2}$$



© Пигарев А.Ю.

БИССЕКТРИССЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

- Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам.
- Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла от вершины до пересечения с противоположной стороной.
- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.
- Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника.

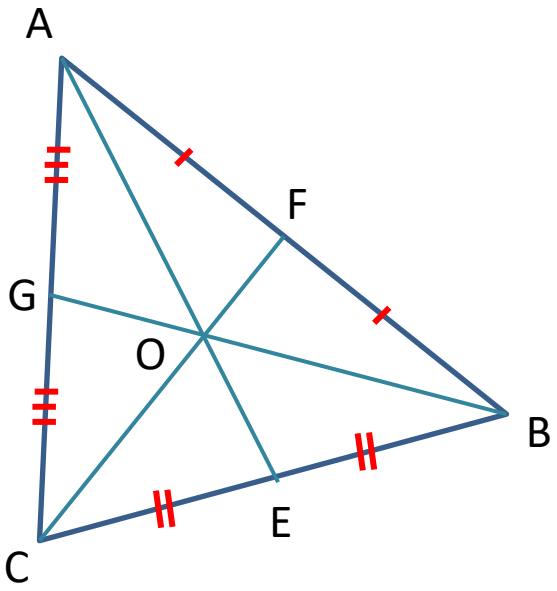


$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB}$$

© Пигарев А.Ю.

МЕДИАНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

- Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке О, являющейся центром тяжести треугольника
- Точкой О медианы делятся на отрезки в отношении 2: 1 (считая от вершины).

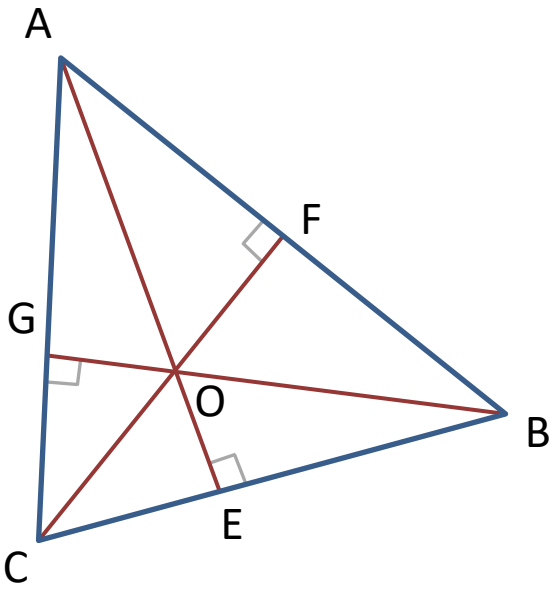


$$\frac{CO}{OF} = \frac{BO}{OG} = \frac{AO}{OE} = \frac{2}{1}$$

© Пигарев А.Ю.

ВЫСОТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

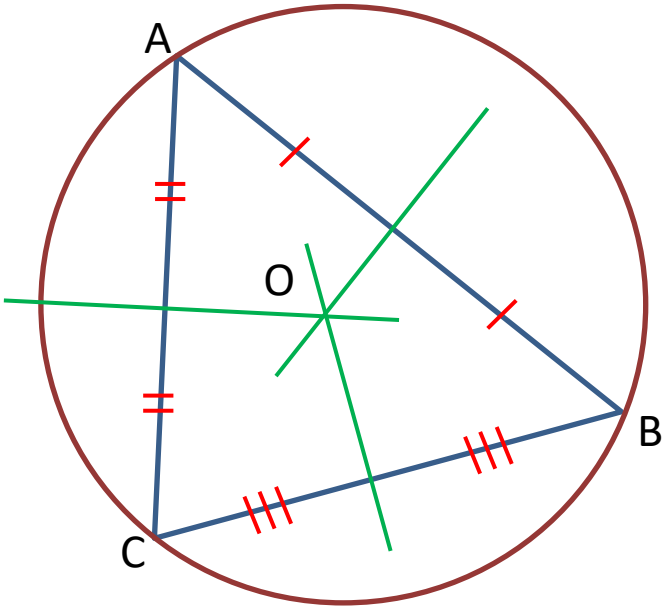
- Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее продолжение.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке O, называемой ортоцентром.
- В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника.
- В прямоугольном он совпадает с вершиной прямого угла.



© Пигарев А.Ю.

СЕРЕДИННЫЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

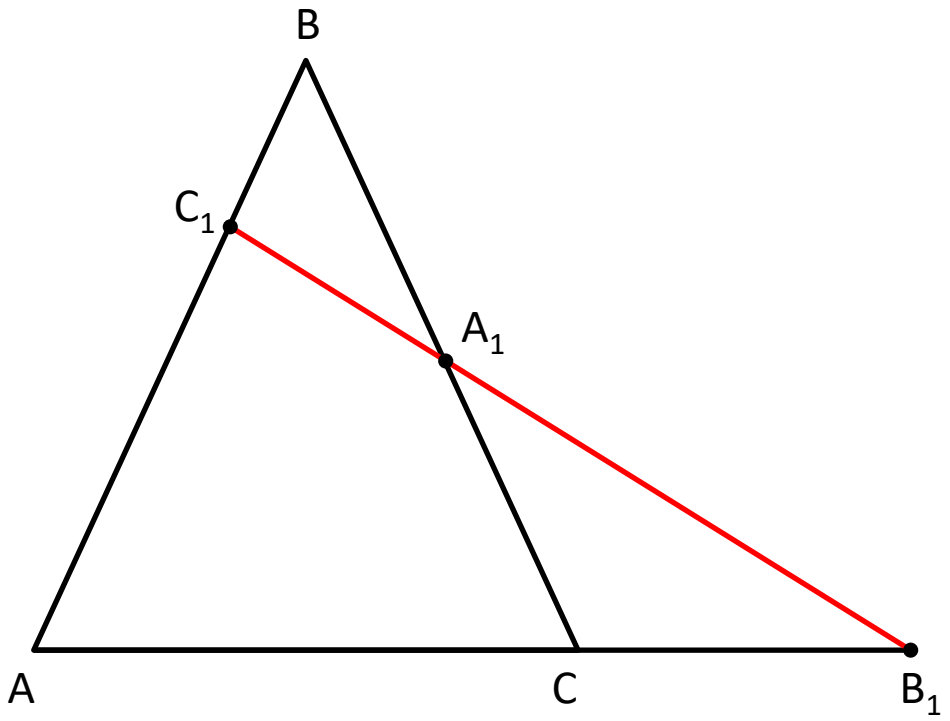
- Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности.



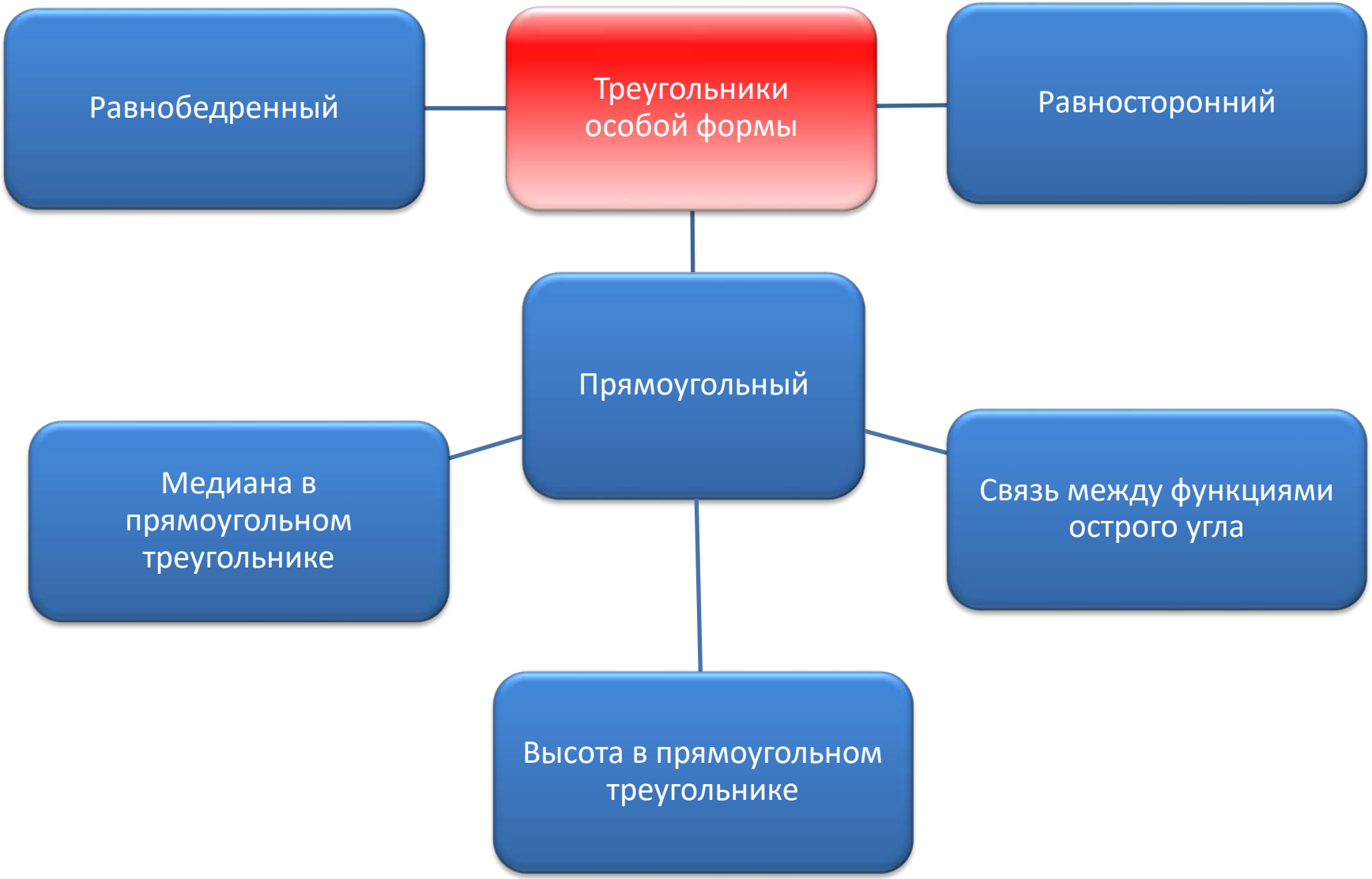
© Пигарев А.Ю.

ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

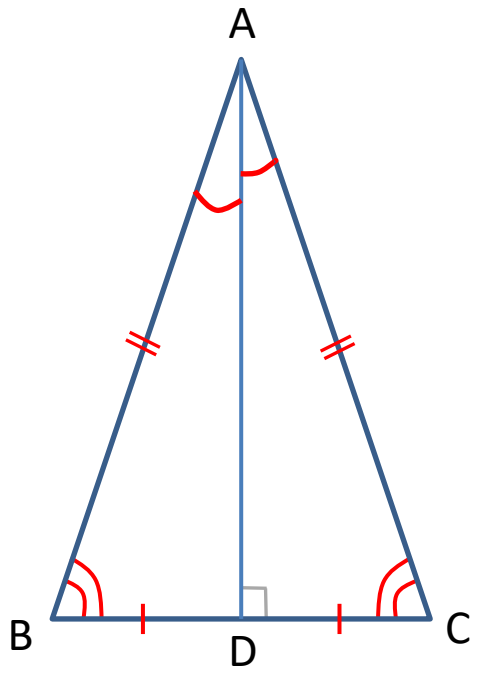


© Пигарев А.Ю.


Треугольники особой формы
Равнобедренный
Равносторонний
Прямоугольный
Медиана в прямоугольном треугольнике
Связь между функциями острого угла
Высота в прямоугольном треугольнике

© Пигарев А.Ю.

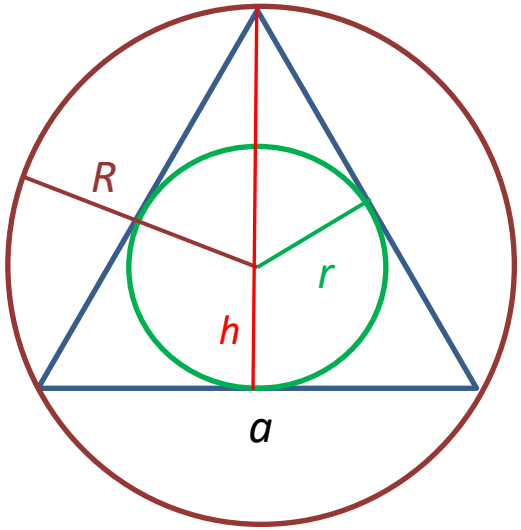
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



- Равнобедренный треугольник – треугольник, у которого две стороны (боковые стороны) равны.
- Медиана (AD), проведенная к основанию (BC) является биссектрисой и высотой.
- Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

© Пигарев А.Ю.

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Равносторонний треугольник – треугольник, у которого все стороны равны.

Все углы равностороннего треугольника по 60°.

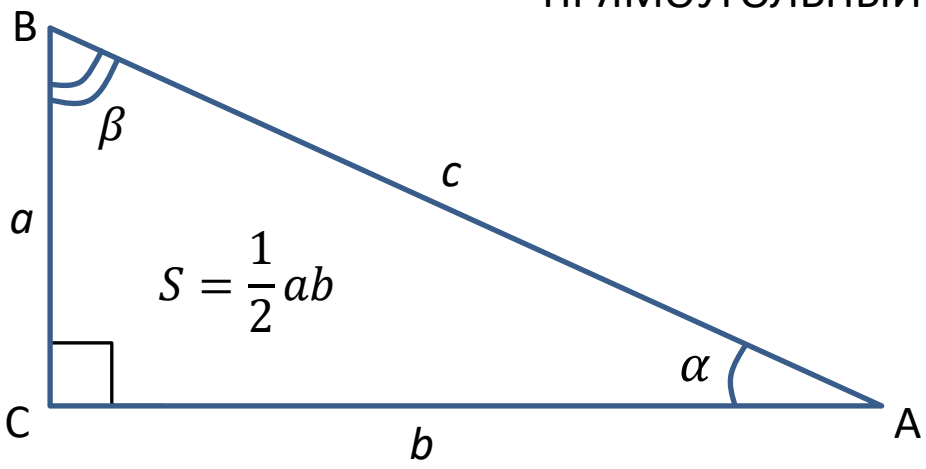
Медианы, высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке – центре вписанной и описанной окружностей.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad R = 2r$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}h = 2r \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}h = \frac{R}{2}$$

© Пигарев А.Ю.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Теорема Пифагора:
квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Косинус – отношение прилежащего катета к гипотенузе.
Синус – отношение противолежащего катета к гипотенузе.
Тангенс – отношение противолежащего катета к прилежащему.
Котангенс – отношение прилежащему катета к противолежащему.

Гипотенуза – диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника

$$\alpha + \beta = 90° = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c} \qquad tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = ctg\beta$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = tg\beta$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

φ	30°	45°	60°
	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\,\varphi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

© Пигарев А.Ю.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos A = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos A = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\sin A = a \Rightarrow \cos A = \sqrt{1 - (\sin A)^2}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\cos A = a \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - (\cos A)^2}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

© Пигарев А.Ю.

ВЫСОТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

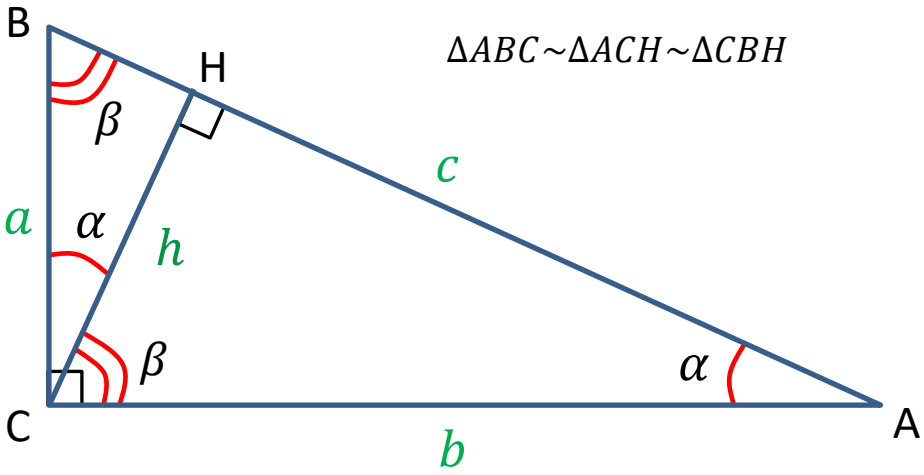
$$CH^2 = AH \cdot BH$$

Квадрат высоты равен произведению отрезков, на которые она разбивает гипотенузу

$$BC^2 = BH \cdot BA$$

$$AC^2 = AH \cdot AB$$

Квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу



$$\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CBH$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CA = \frac{1}{2} CH \cdot AB$$

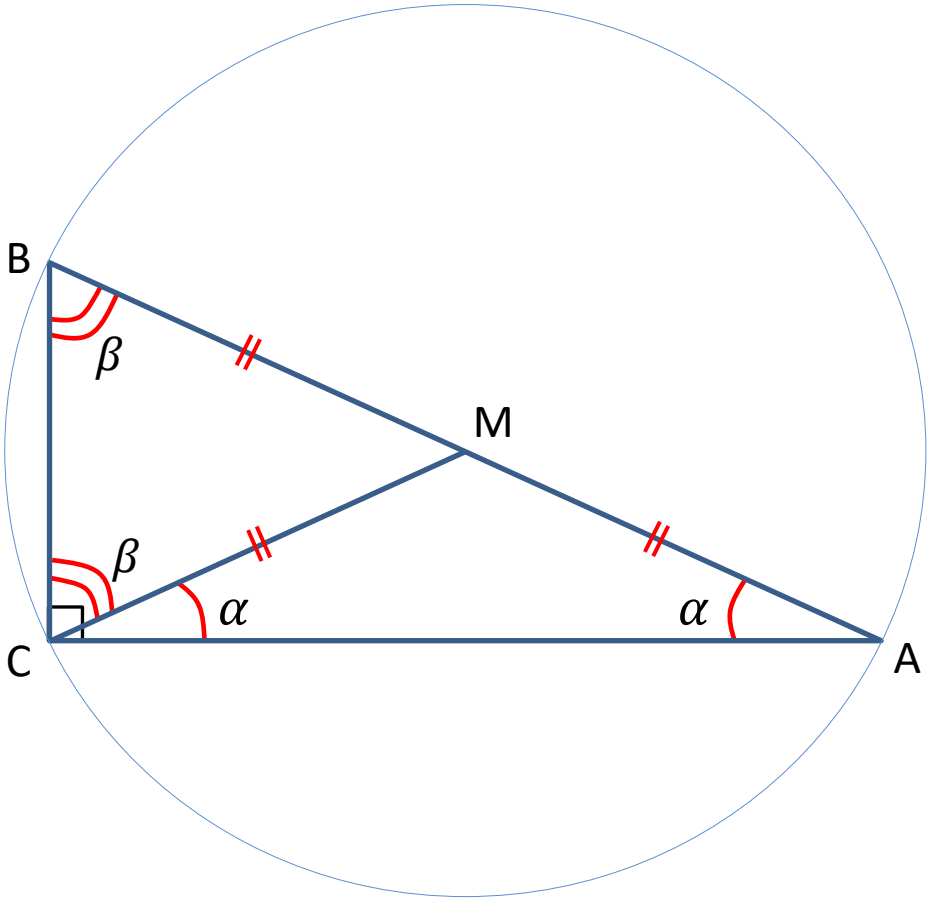
$$BC \cdot CA = CH \cdot AB$$

$$a \cdot b = c \cdot h$$

Произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту

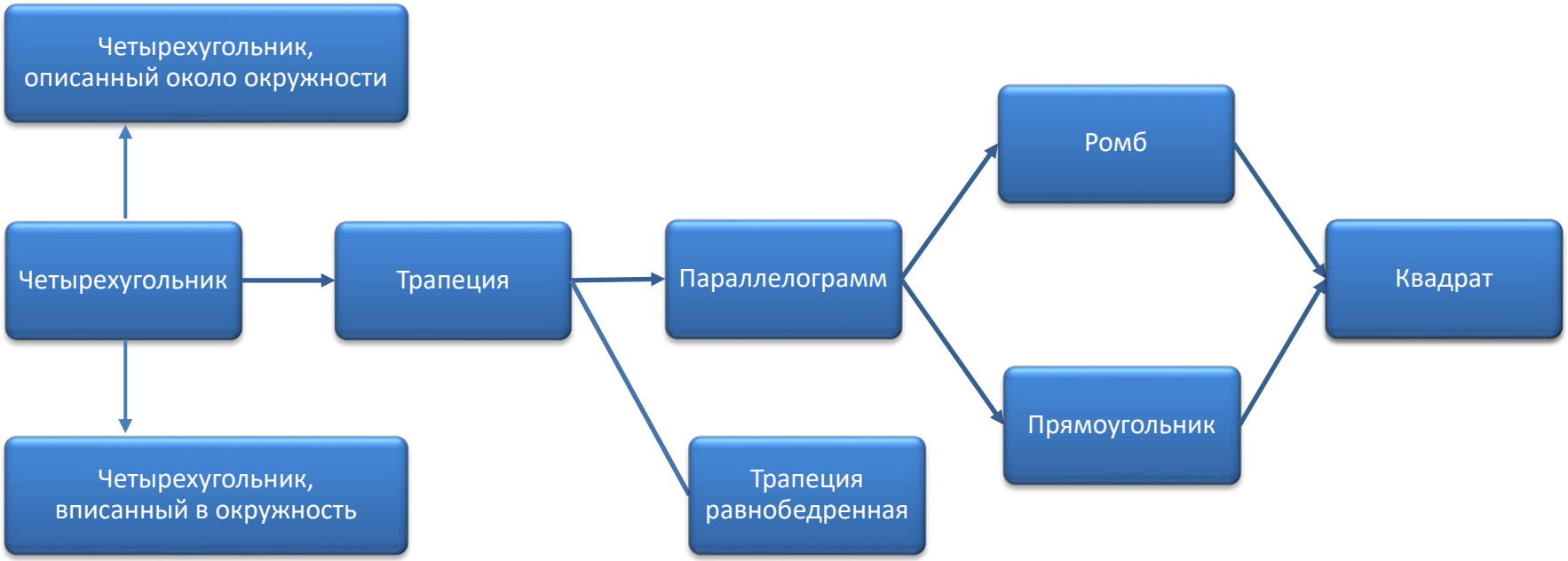
© Пигарев А.Ю.

МЕДИАНА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



Середина гипотенузы является центром описанной окружности

© Пигарев А.Ю.


Четырехугольник, описанный около окружности
Четырехугольник
Четырехугольник, вписанный в окружность
Трапеция
Трапеция равнобедренная
Параллелограмм
Ромб
Прямоугольник
Квадрат

© Пигарев А.Ю.

ТРАПЕЦИЯ

Трапеция – четырёхугольник, две противоположные стороны которого параллельны между собой, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются основаниями, а непараллельные — боковыми сторонами.

Средняя линия — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

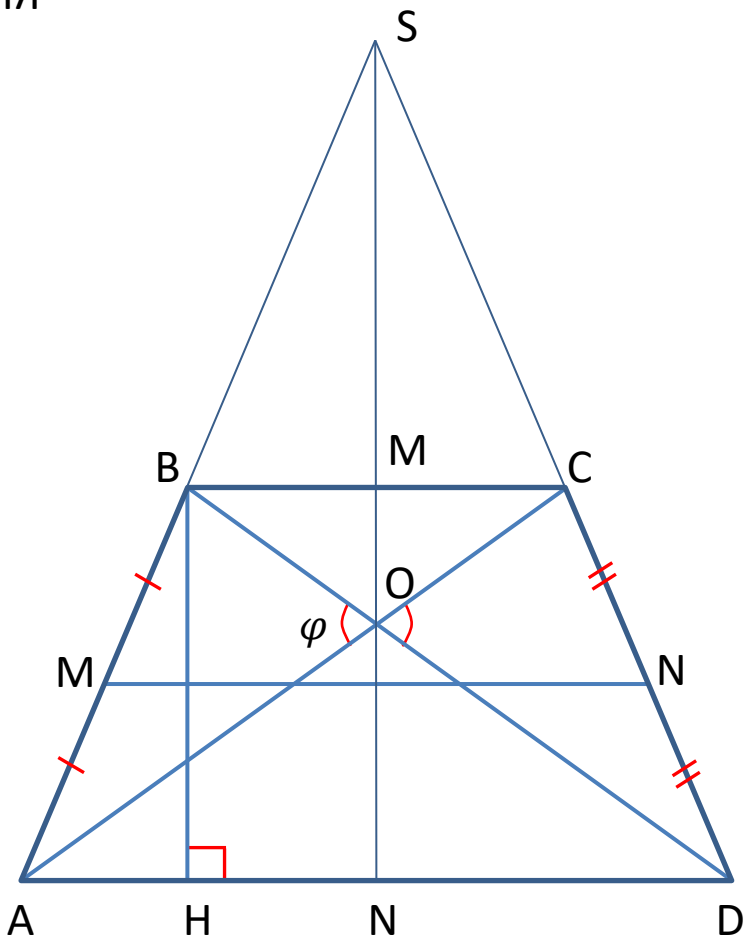
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме:

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Равнобедренная трапеция – трапеция, у которой боковые стороны равны: AB = CD.

Площадь трапеции :

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$$



Точка пересечения диагоналей любой трапеции (O), точка пересечения продолжений боковых сторон (S) и середины оснований (M, N) лежат на одной прямой

© Пигарев А.Ю.

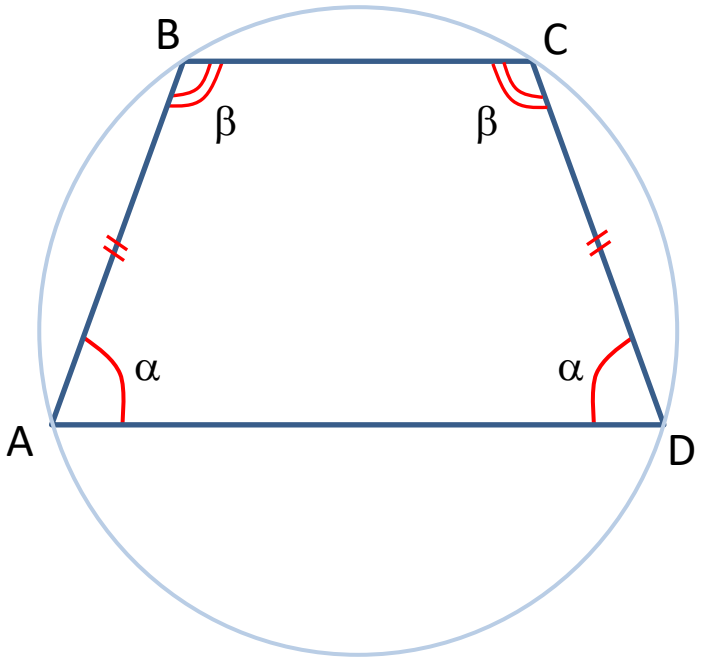
РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ

Равнобедренная трапеция – трапеция, у которой боковые стороны равны: AB = CD.

Углы при основании равнобедренной трапеции равны: ∠A = ∠D; ∠B = ∠C.

Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

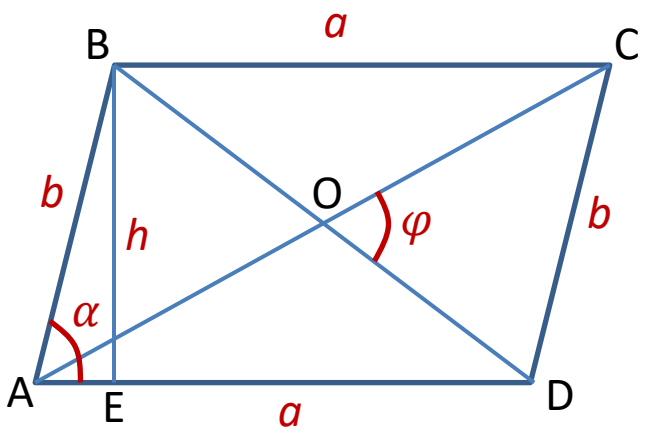
Если около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобедренная.



$$\alpha + \beta = 180°$$

© Пигарев А.Ю.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



Параллелограмм это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

$$AC = d_1, BD = d_2$$

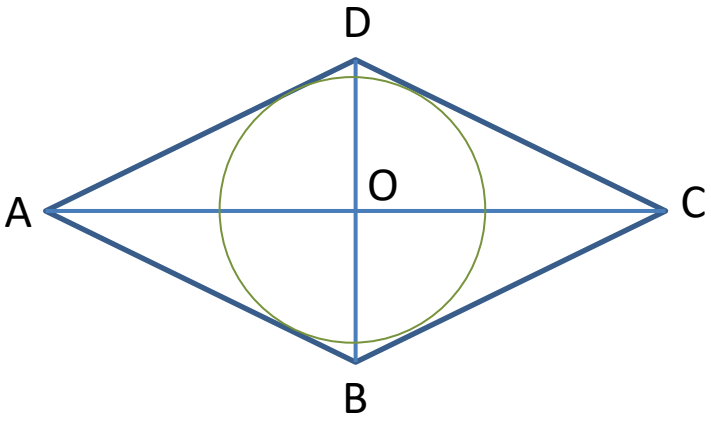
$$\angle BAD = \alpha, \angle COD = \varphi$$

- Противоположные стороны параллелограмма равны: AB = CD, AD = BC.
- Противоположные углы параллелограмма равны: ∠A = ∠C, ∠B = ∠D.
- Сумма односторонних углов равна 180°: ∠A+ ∠B= ∠B+ ∠C= ∠C+ ∠D= ∠D+ ∠A=180°.
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам: AO=OC, BO=OD.
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его двух смежных сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

$$S = ha = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$$

© Пигарев А.Ю.

РОМБ

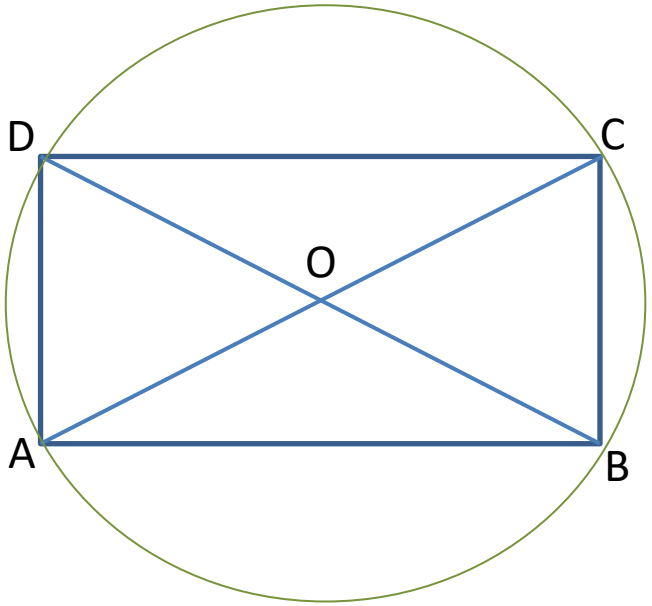


- **Ромб** — это четырехугольник, у которого все стороны равны.
- РОМБ ОБЛАДАЕТ ВСЕМИ СВОЙСТВАМИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА.

- Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.
- Диагонали ромба делят его углы пополам.
- В ромб можно вписать окружность.
- Площадь ромба равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

© Пигарев А.Ю.

ПРЯМОУГОЛЬНИК

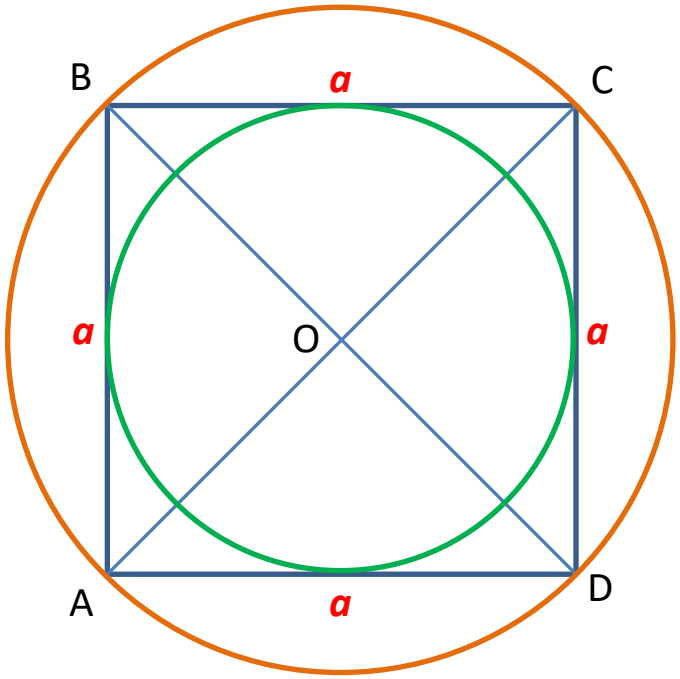


- Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые (равны 90°).
- ПРЯМОУГОЛЬНИК ОБЛАДАЕТ ВСЕМИ СВОЙСТВАМИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА.

- Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.
- Диагонали прямоугольника равны: $AC = BD$.
- Около прямоугольника можно описать окружность.

© Пигарев А.Ю.

КВАДРАТ



- Квадрат – правильный четырехугольник, у которого все стороны равны и все углы равны (по 90°).
- КВАДРАТ ОБЛАДАЕТ ВСЕМИ СВОЙСТВАМИ РОМБА И ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

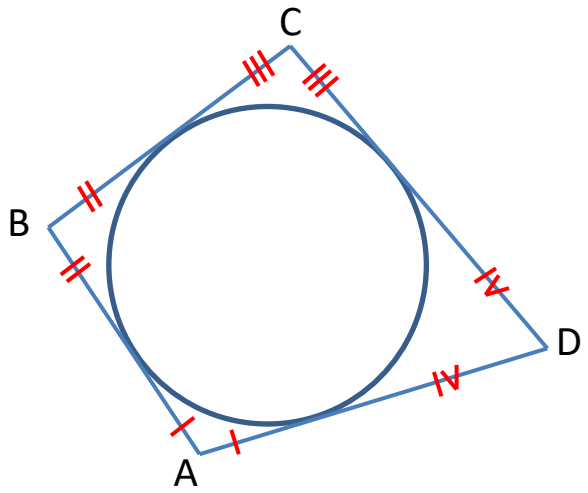
$$S = a^2$$

$$r = \frac{a}{2}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

© Пигарев А.Ю.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ



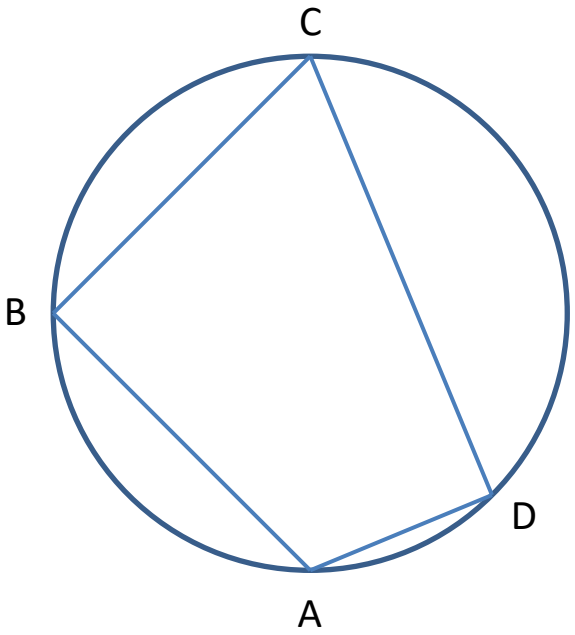
В четырехугольник тогда и только тогда можно вписать окружность, когда суммы противоположных сторон одинаковы *и равны половине периметра четырехугольника*:

$AB + CD = BC + AD = \frac{1}{2}P$, где

$P = AB + BC + CD + DA$

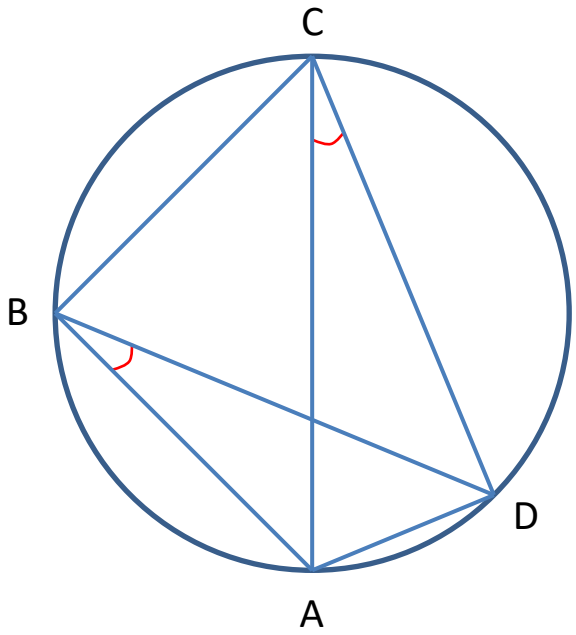
© Пигарев А.Ю.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ВПИСАННЫЙ В ОКРУЖНОСТЬ



Четырехугольник тогда и только тогда можно вписать в окружность, когда суммы противоположных углов равны 180°:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$$



Если связанные углы* равны, то около четырехугольника можно описать окружность:

$$\angle ABD = \angle ACD$$

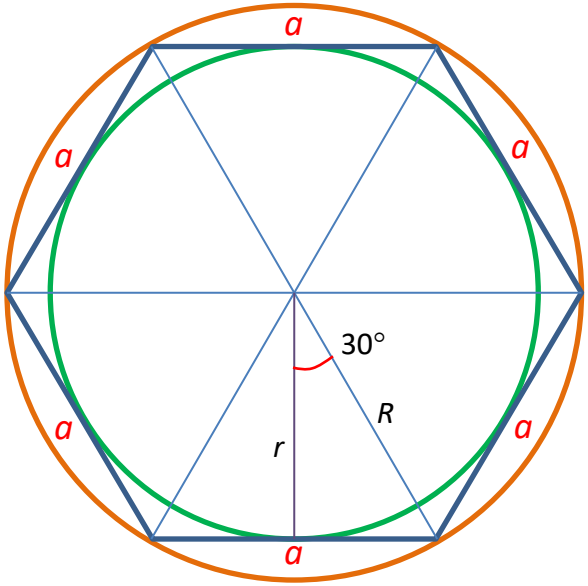
*углы, опирающиеся на один отрезок

© Пигарев А.Ю.

Правильный треугольник
Правильный n-угольник
Правильные многоугольники
Квадрат
Правильный шестиугольник

© Пигарев А.Ю.

ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК



- Правильный шестиугольник – шестиугольник, у которого все стороны равны и все углы по 120°.
- Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников.

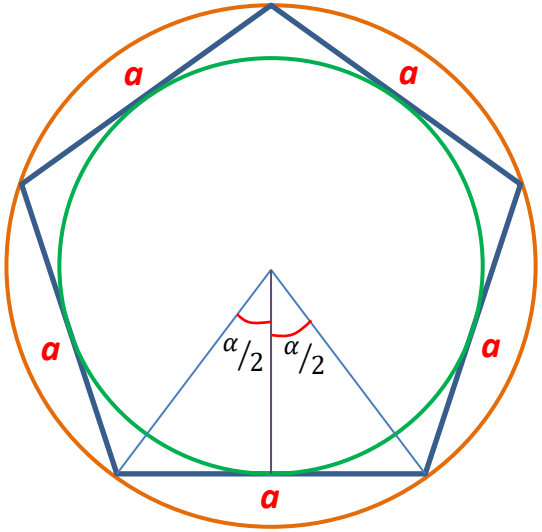
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = a$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

© Пигарев А.Ю.

ПРАВИЛЬНЫЙ n-УГОЛЬНИК



- Правильный n-угольник состоит из n равнобедренных треугольников с углом $\alpha = \frac{360°}{n}$ при вершине.

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

$$r = \frac{a}{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad R = \frac{a}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$p = na$$

$$S = n \cdot \left(\frac{1}{2}ar\right) = \frac{1}{2}pr$$

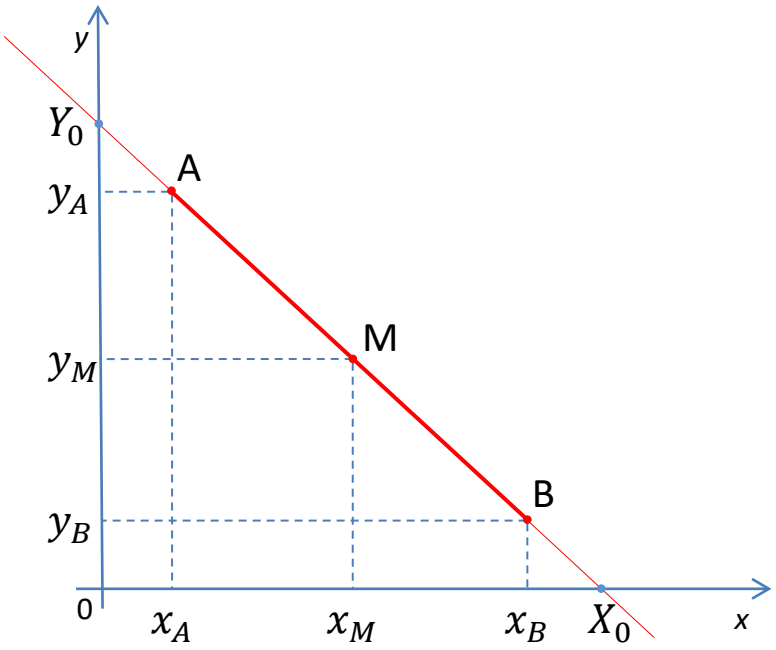
Правильный n-угольник служит основанием правильной призмы и правильной пирамиды.

© Пигарев А.Ю.

Координаты и векторы
Отрезок и прямая
Точка и прямая
Окружность
Вектор
Умножение вектора на число
Сложение и вычитание векторов
Скалярное произведение векторов

© Пигарев А.Ю.

ОТРЕЗОК И ПРЯМАЯ



Длина отрезка:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Середина отрезка:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2}, y_M = \frac{y_B + y_A}{2}.$$

Уравнение прямой по двум точкам:

$$\frac{x_B - x}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y}{y_B - y_A}$$

Каноническое уравнение прямой:

$$a \cdot x + b \cdot x + c = 0$$

Уравнение прямой в отрезках:

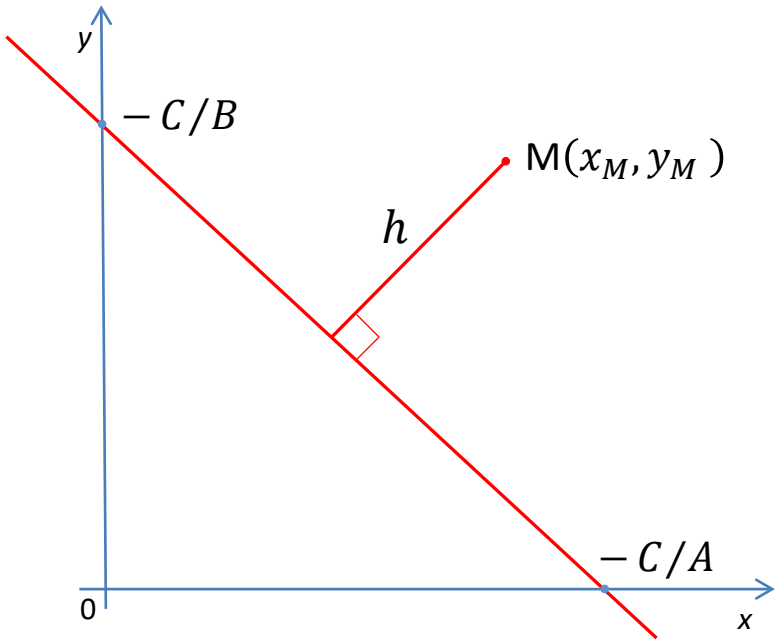
$$\frac{x}{X_0} + \frac{y}{Y_0} = 1$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = k \cdot x + a$$

© Пигарев А.Ю.

ТОЧКА И ПРЯМАЯ



Уравнение прямой:

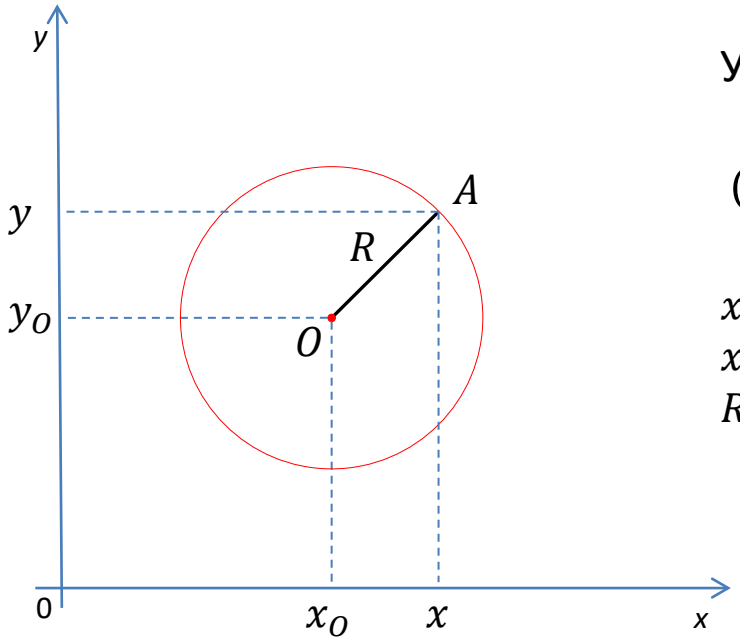
$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

Расстояние от точки до прямой:

$$h = \frac{|A \cdot x_M + B \cdot y_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

© Пигарев А.Ю.

ОКРУЖНОСТЬ



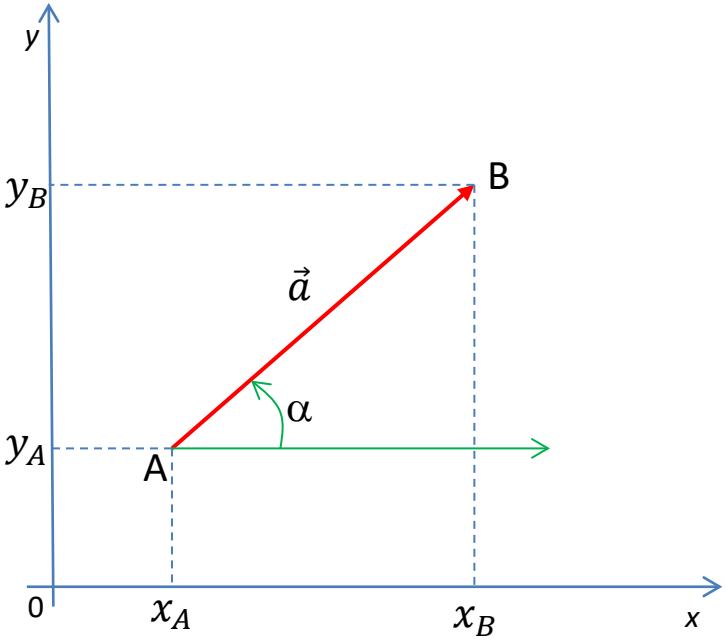
Уравнение окружности:

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2$$

x_O, y_O – координаты центра окружности,
x, y – координаты произвольной точки окружности,
R – радиус окружности.

© Пигарев А.Ю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА



Вектор – направленный отрезок (A – начало вектора, B – конец).

Координаты вектора (проекции вектора на координатные оси):

$a_x = x_B - x_A = a\cos\alpha;$

$a_y = y_B - y_A = a\sin\alpha.$

Модуль вектора – длина его отрезка:

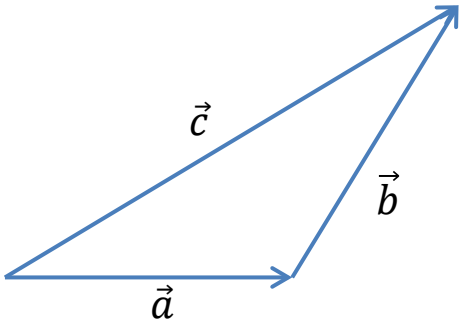
$$|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = a = AB = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,.$$

Угол α отсчитывается от положительного направления оси x и имеет положительное значение, если поворот против часовой стрелки, и отрицательное, если против.

© Пигарев А.Ю.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

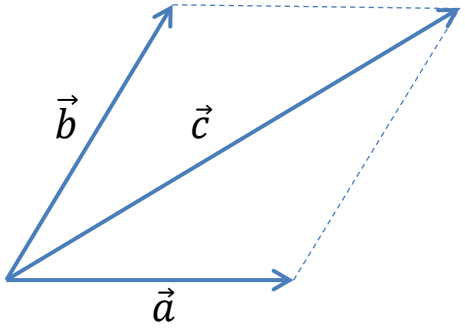
Правило треугольника



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

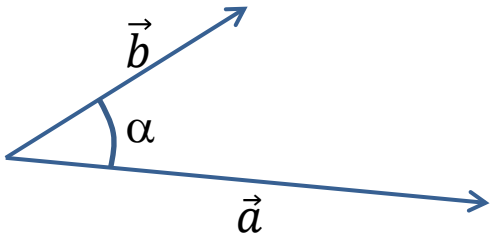
Правило параллелограмма



- Чтобы найти разность векторов $\vec{c} - \vec{a}$, можно нарисовать их исходящими из одной точки, и соединить конец вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{c}$. Получится вектор $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$.
- Проверить разность сложением!

© Пигарев А.Ю.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

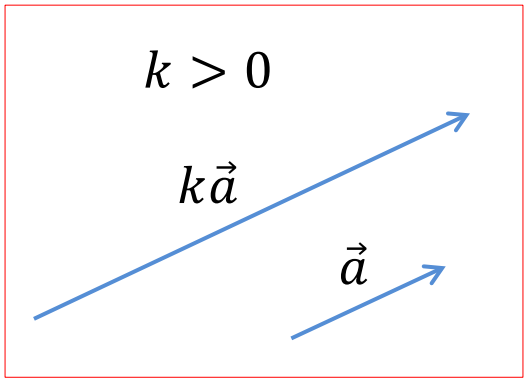
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{a \cdot b}$$

Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю $(\cos 90° = 0)$.

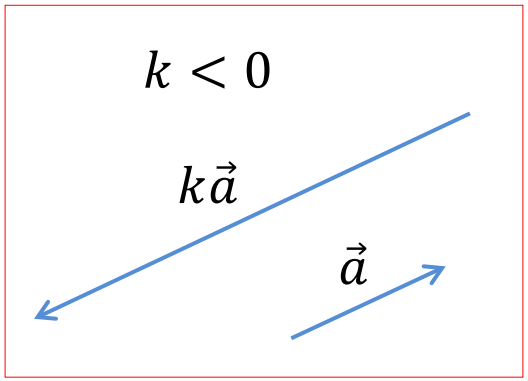
© Пигарев А.Ю.

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

При умножении вектора $\vec{a}$ на число $k > 0$ получается сонаправленный вектор $k\vec{a}$, модуль которого в k раз больше: $|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$



При умножении вектора $\vec{a}$ на число $k < 0$ получается противоположно направленный вектор $k\vec{a}$, модуль которого в $|k|$ раз больше: $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

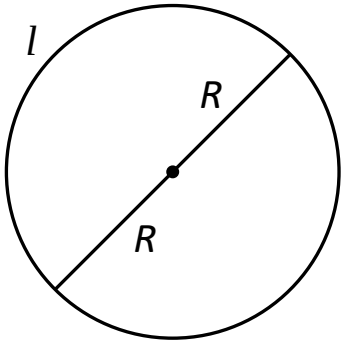


$$\vec{a} = \{a_x; a_y\} \Rightarrow k\vec{a} = \{ka_x; ka_y\}$$

© Пигарев А.Ю.

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

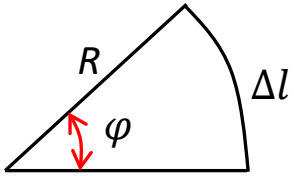
Число π – отношение длины окружности к ее диаметру



$$D = 2R$$

$$\pi = \frac{l}{D} \Leftrightarrow l = 2\pi R = \pi D$$

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$



$$\varphi = \frac{\Delta l}{R}$$

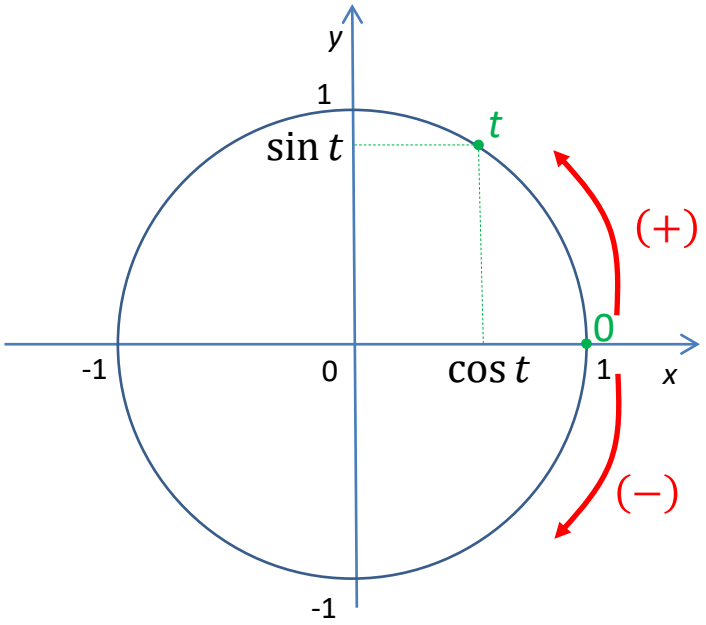
$$\Delta S = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi R^2$$

© Пигарев А.Ю.

Основные определения
Квадратные тригонометрические уравнения
Формулы приведения
$\operatorname{ctg} x = a$
Тригонометрия
Формулы преобразования
$\operatorname{tg} x = a$
$\sin x = a$
$\cos x = a$

© Пигарев А.Ю.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ



- Число π – отношение длины окружности к ее диаметру.
- Числовая (тригонометрическая) окружность – окружность радиуса 1 с центром в начале координат.
- Косинус числа t – абсцисса точки t числовой окружности.
- Синус числа t – ордината точки t числовой окружности.

$\cos(-t) = \cos t$

$\sin(-t) = -\sin t$

$\mathrm{tg}(-t) = -\mathrm{tg}\, t$

$\mathrm{ctg}(-t) = -\mathrm{ctg}\, t$

$tg\ t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

$ctg\ t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$

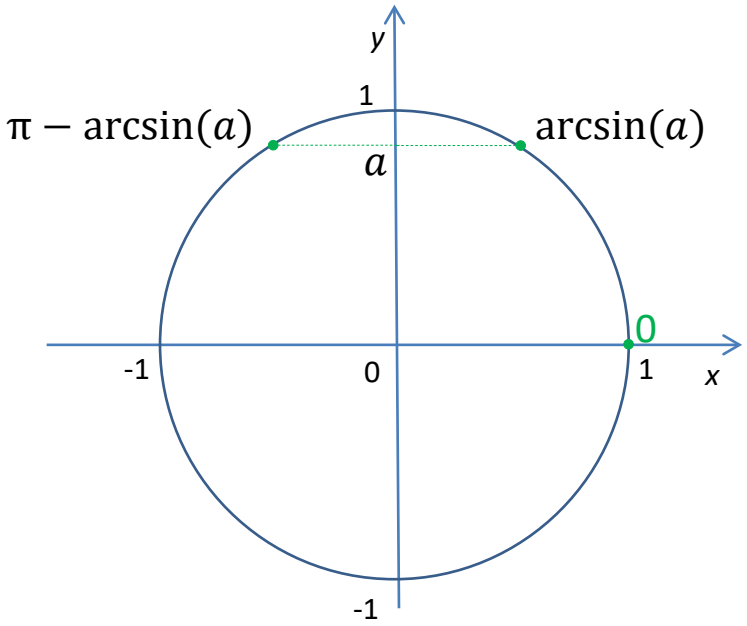
$tg\ t \cdot ctg\ t = 1$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\ \varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$ctg\ \varphi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

© Пигарев А.Ю.

$\sin x = a, \quad -1 \le a \le 1$



Частные случаи:

- $a = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
- $a = 0, x = \pi n, n \in Z$
- $a = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$$\left[\begin{array}{l} x = arcsin(a) + 2\pi n, n \in Z \\ x = \pi - arcsin(a) + 2\pi m, m \in Z \end{array}\right.$$

или

$$x = (-1)^{n} arcsin(a) + \pi n, n \in Z$$

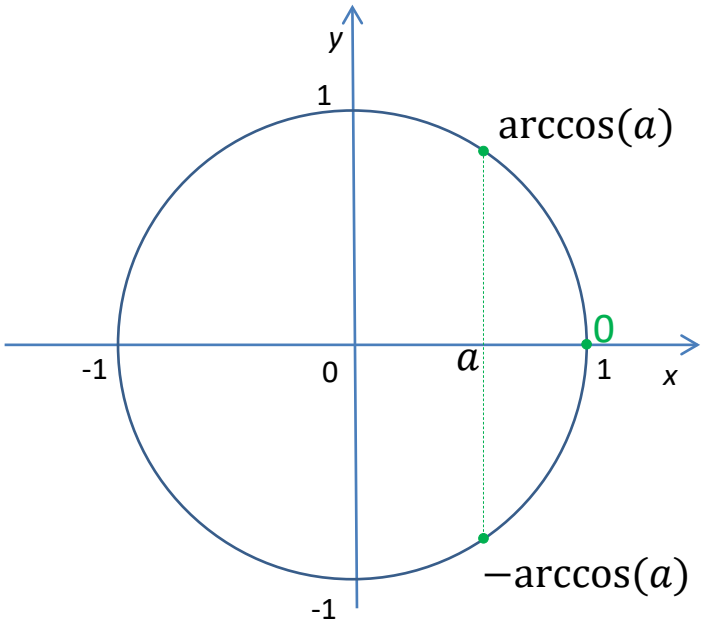
$$D\big(arcsin(x)\big) = [-1; 1] \qquad E\big(arcsin(x)\big) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin\big(arcsin(a)\big) = a$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin(a) \qquad arcsin(a) + arccos(a) = \frac{\pi}{2}$$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

© Пигарев А.Ю.

$$\cos x = a, \qquad -1 \le a \le 1$$



Частные случаи:

- $a = 1, x = 2\pi n, n \in Z$
- $a = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
- $a = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$$x = \pm arccos(a) + 2\pi n, n \in Z$$

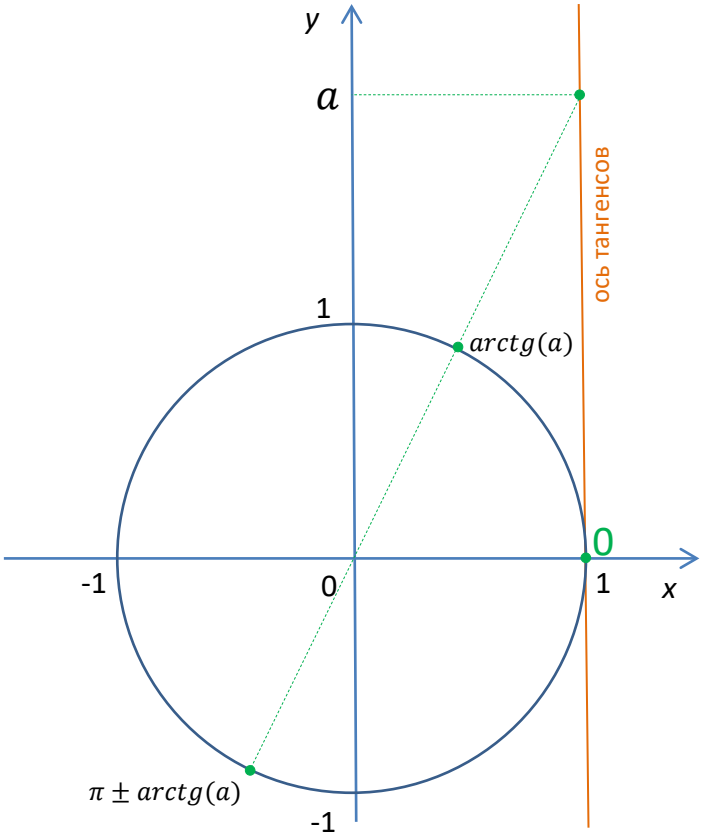
$$D\big(arccos(x)\big) = [-1; 1] \qquad E\big(arccos(x)\big) = [0;\ \pi] \qquad \cos\big(arccos(a)\big) = a$$

$$arccos(-a) = \pi - arccos(a) \qquad arcsin(a) + arccos(a) = \frac{\pi}{2}$$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

© Пигарев А.Ю.

$\mathbf{tg}\, x = a, \quad a \in R$



$$x = arctg(a) + \pi n, n \in Z$$

$$D\big(arctg(x)\big) = R$$

$$E\big(arctg(x)\big) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{tg}\big(arctg(a)\big) = a$$

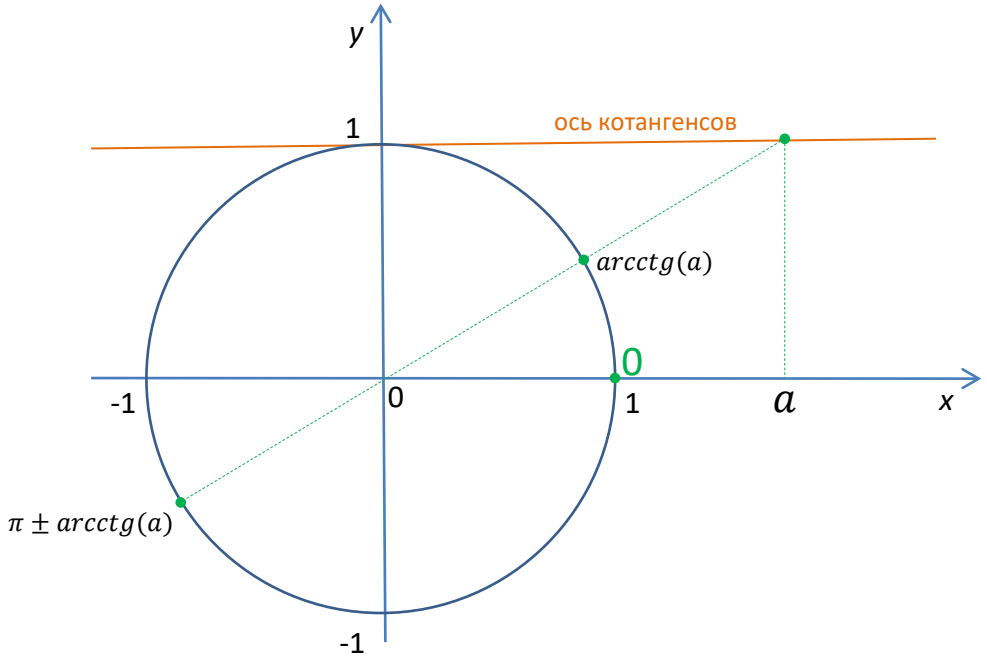
$$arctg(-a) = -arctg(a)$$

$$arctg(a) + arcctg(a) = \frac{\pi}{2}$$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$tg\ \varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

© Пигарев А.Ю.

$\mathbf{ctg}\, x = a, \quad a \in R$



$x = arcctg(a) + \pi n, n \in Z$

$D\big(arcctg(x)\big) = R$

$E\big(arcctg(x)\big) = (0; \pi)$

$\mathrm{ctg}\big(arcctg(a)\big) = a$

$arcctg(-a) = \pi - arcctg(a)$

$arctg(a) + arcctg(a) = \frac{\pi}{2}$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$ctg\ \varphi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

© Пигарев А.Ю.

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}n + t\right) = \psi(t)$$

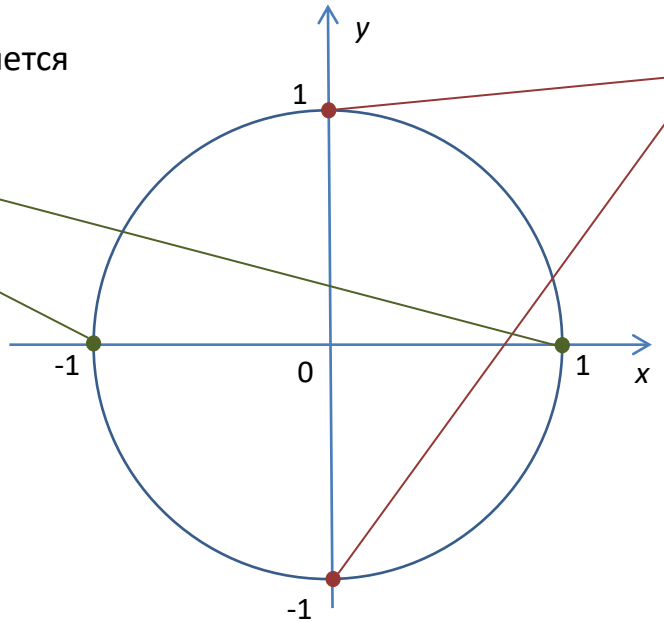
$n = 2k$

$\frac{\pi}{2} \cdot 2k$ – функция сохраняется

Примеры:

$\cos(\pi + t) = -\cos t$
$\sin(\pi + t) = -\sin t$
$\mathrm{tg}(\pi + t) = \mathrm{tg}\, t$
$\mathrm{ctg}(\pi + t) = \mathrm{ctg}\, t$

$\cos(2\pi + t) = \cos t$
$\sin(2\pi + t) = \sin t$
$\mathrm{tg}(2\pi + t) = \mathrm{tg}\, t$
$\mathrm{ctg}(2\pi + t) = \mathrm{ctg}\, t$



$n = 2k + 1$

$\frac{\pi}{2}(2k + 1)$ – функция меняется на кофункцию: косинус на синус, синус на косинус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс.

Примеры:

$\cos(\pi/2 + t) = -\sin t$
$\sin(\pi/2 + t) = \cos t$
$\mathrm{tg}(\pi/2 + t) = -\mathrm{ctg}\, t$
$\mathrm{ctg}(\pi/2 + t) = -\mathrm{tg}\, t$

$\cos(\pi/2 - t) = \sin t$
$\sin(\pi/2 - t) = \cos t$
$\mathrm{tg}(\pi/2 - t) = \mathrm{ctg}\, t$
$\mathrm{ctg}(\pi/2 - t) = \mathrm{tg}\, t$

Перед приведенной функцией $\psi(t)$ ставится знак приводимой $\varphi\left(\frac{\pi}{2}n + t\right)$, при условии $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

© Пигарев А.Ю.

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

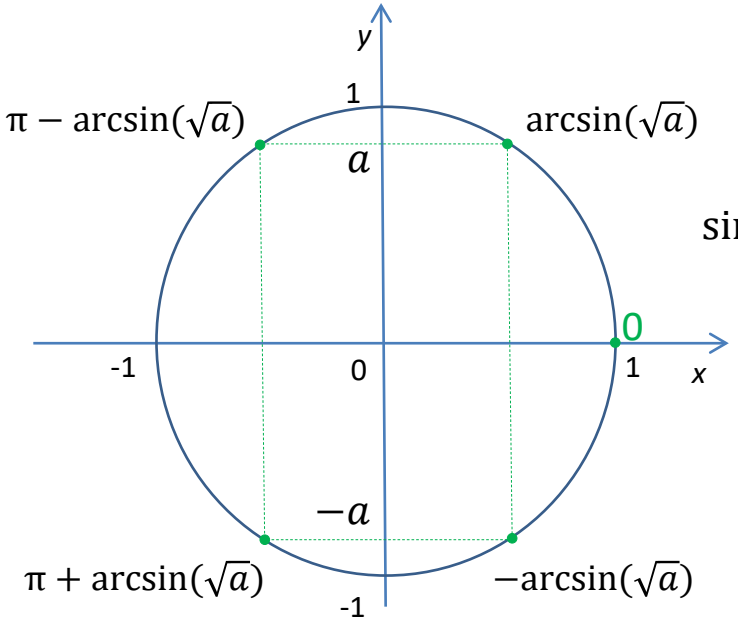
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

© Пигарев А.Ю.

КВАДРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ



$$\sin^2 x = a, 0 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arcsin \sqrt{a} + \pi n, n \in Z$$

АНАЛОГИЧНО:

$$\cos^2 x = a, 0 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos \sqrt{a} + \pi n, n \in Z$$

$$\operatorname{tg}^2 x = a, 0 \le a \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{a} + \pi n, n \in Z$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = a, 0 \le a \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{arcctg} \sqrt{a} + \pi n, n \in Z$$

© Пигарев А.Ю.

Математика

© Пигарев А.Ю.

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a\,b^2 + b^3$

4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3a\,b^2 - b^3$

5) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

6) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

7) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Особые случаи:

$(-a-b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(-b+a)^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ПРАВИЛА АРИФМЕТИКИ

8) $-a+b = b-a$

9) $a-b = -(b-a)$

10) $-a-b = -(a+b)$

11) $a+(-b) = a-b$

12) $-a+(-b) = -a-b$

13) $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b}$

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Умножение на $10^{\pm n}$:

$X \cdot 10^n$ – переносим запятую у числа X на n знаков вправо

$X \cdot 10^{-n}$ – переносим запятую у числа X на n знаков влево

© Пигарев А.Ю.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ И КОРНЯ

Арифметический корень

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$$a > 0, b > 0$$

1) $a^0 = 1$

2) $a^1 = a$

3) $a^m a^n = a^{m+n}$

4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

5) $a^{mn} = (a^m)^n$

6) $(a^m)^n = (a^n)^m$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

8) $(ab)^n = a^n b^n$

9) $\frac{1}{a} = a^{-1}$

10) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

12) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

13) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

14) $\sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$

15) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

16) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

17) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

18) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\forall a$

19) $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$

20) $\sqrt{a^2} = |a|$

$ab > 0$

21) $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$

22) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

$a \geq 0$

23) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

24) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

25) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

26) $(\sqrt{a})^2 = a$

© Пигарев А.Ю.

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то два решения $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

если $D = 0$, то одно решение $x_1 = -\frac{b}{2a}$,

если $D < 0$, решений нет.

Теорема Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Разложение на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Выделение полного квадрата:

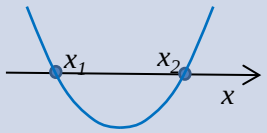
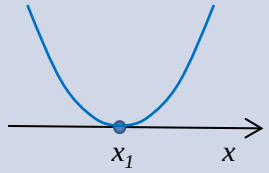
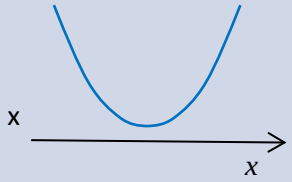
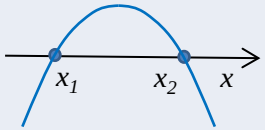
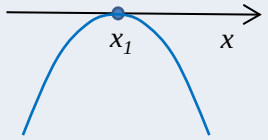
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

© Пигарев А.Ю.

КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО

$ax^2 + bx + c \geq 0$ – часть графика над осью X, включая нули;
$ax^2 + bx + c > 0$ – часть графика над осью X, не включая нули;
$ax^2 + bx + c \leq 0$ – часть графика под осью X, включая нули;
$ax^2 + bx + c < 0$ – часть графика под осью X, не включая нули.

$$D = b^2 - 4ac$$

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Координата x вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

© Пигарев А.Ю.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x^1+b_0}$$

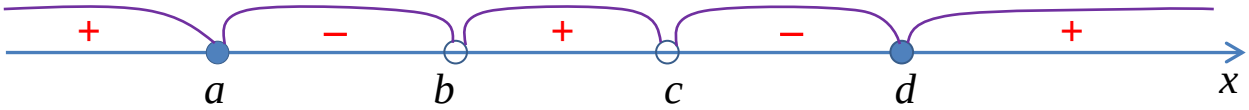
Точки разрыва – значения *x*, при которых знаменатель равен нулю:

$$b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x^1+b_0=0$$

Нули – значения *x*, при которых числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю:

$$\begin{cases}a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0=0\\ b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x^1+b_0\neq 0\end{cases}$$

Участки числовой прямой между нулями и точками разрыва – интервалы знакопостоянства функции $f(x)$:



Нули входят в решение нестрогих неравенств ($\geq$ или $\leq$).
Точки разрыва в решение никогда не входят!!!

© Пигарев А.Ю.

УРАВНЕНИЯ

$\psi(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow$

1) $\psi(x) + a = \varphi(x) + a;\ a \in R$

2) $\psi(x) - b = \varphi(x) - b;\ b \in R$

3) $k \cdot \psi(x) = k \cdot \varphi(x); k \neq 0$

4) $\frac{\psi(x)}{d} = \frac{\varphi(x)}{d}; d \neq 0$

5) $[\psi(x)]^{2n+1} = [\varphi(x)]^{2n+1};\ n \in Z$

6) $\sqrt[2n+1]{\psi(x)} = \sqrt[2n+1]{\varphi(x)};\ n \in N$

$\psi(x) = \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow$

7) $[\psi(x)]^n = [\varphi(x)]^n; n \neq 0, n \in Z$

8) $\sqrt[n]{\psi(x)} = \sqrt[n]{\varphi(x)};\ n \in N$

$\psi(x) = \varphi(x) \Rightarrow$

9) $[\psi(x)]^{2n} = [\varphi(x)]^{2n}; n \in N$

$\begin{cases} \psi(x) = \varphi(x) \\ \alpha(x) = \beta(x) \end{cases} \Rightarrow$

10) $\psi(x) + \alpha(x) = \varphi(x) + \beta(x)$

11) $\psi(x) - \alpha(x) = \varphi(x) - \beta(x)$

12) $\psi(x) \cdot \alpha(x) = \varphi(x) \cdot \beta(x)$

13) $\frac{\psi(x)}{\alpha(x)} = \frac{\varphi(x)}{\beta(x)}$, если $\alpha(x) = \beta(x) \neq 0$

Решение пропорции

$a = \frac{b \cdot c}{d}$ $\quad$ $c = \frac{a \cdot d}{b}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a \cdot d = c \cdot b$$

$b = \frac{a \cdot d}{c}$ $\quad$ $d = \frac{b \cdot c}{a}$

«левое множим на правое, делим на противоположное»

© Пигарев А.Ю.

НЕРАВЕНСТВА

$$\psi(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow$$

1) $\psi(x) + a > \varphi(x) + a;\ a \in R$
2) $\psi(x) - b > \varphi(x) - b;\ b \in R$
3) $k \cdot \psi(x) > k \cdot \varphi(x);\ k > 0$
4) $h \cdot \psi(x) < h \cdot \varphi(x);\ h < 0$
5) $\frac{\psi(x)}{d} > \frac{\varphi(x)}{d};\ d > 0$
6) $\frac{\psi(x)}{q} < \frac{\varphi(x)}{q};\ q < 0$
7) $[\psi(x)]^{2n+1} > [\varphi(x)]^{2n+1};\ n \in N$
8) $\sqrt[2n+1]{\psi(x)} > \sqrt[2n+1]{\varphi(x)};\ n \in N$

$$\psi(x) > \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow$$

9) $\frac{1}{\psi(x)} < \frac{1}{\varphi(x)}$

Сравнение положительных дробей

$$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c$$

$$\psi(x) > \varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

10) $[\psi(x)]^{2n} > [\varphi(x)]^{2n}; n \in N$
11) $\sqrt[2n]{\psi(x)} > \sqrt[2n]{\varphi(x)};\ n \in N$

$$\begin{cases} \psi(x) > \varphi(x) \\ \alpha(x) > \beta(x) \end{cases} \Rightarrow$$

12) $\psi(x) + \alpha(x) > \varphi(x) + \beta(x)$

© Пигарев А.Ю.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Определение модуля

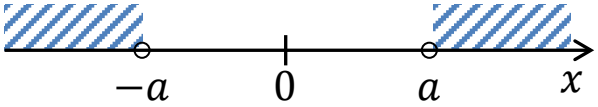
$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0 \\ -x, \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Уравнение

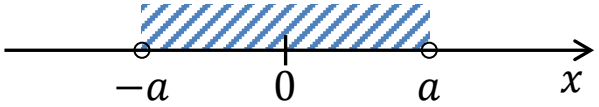
$$|x| = a > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.$$

Неравенства с модулем

$$|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array}\right.$$



$$|x| < a \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ x > -a \end{cases}$$



© Пигарев А.Ю.

ПРОЦЕНТЫ

1 % – это одна сотая часть целого

Увеличить число X на $n\%$ ***РАВНОСИЛЬНО*** умножить число X на $k = \left(1 + \frac{n}{100}\right)$

Уменьшить число X на $n\%$ ***РАВНОСИЛЬНО*** умножить число X на $k = \left(1 - \frac{n}{100}\right)$

Правило пропорции

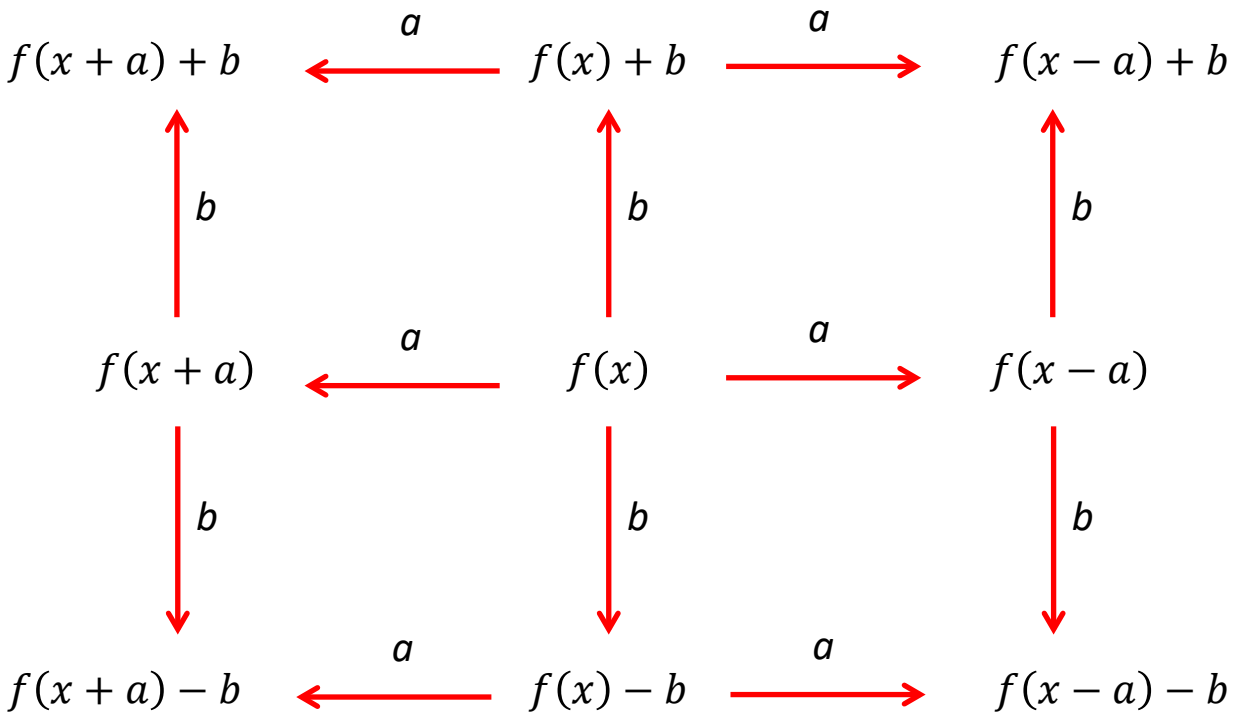
$$\begin{matrix} M & \rightarrow & 100\% \\ m & \rightarrow & x\% \end{matrix} \Rightarrow M \cdot x = m \cdot 100 \Longrightarrow x = \frac{100 \cdot m}{M}$$

© Пигарев А.Ю.

Параллельный перенос
Определенный интеграл
Четность и нечетность функций
Математический анализ
Первообразная
Производная
Касательная
Монотонность и экстремумы

© Пигарев А.Ю.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС



© Пигарев А.Ю.

Четность и нечетность функций

Четная

$$F(-x) = F(x)$$

Пример: $F(x) = x^2$

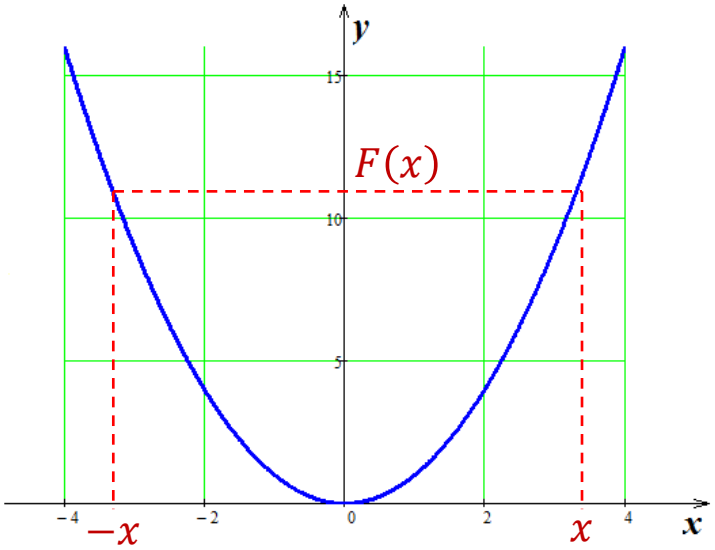


График симметричен относительно оси Y

Нечетная

$$F(-x) = -F(x)$$

Пример: $F(x) = x^3$

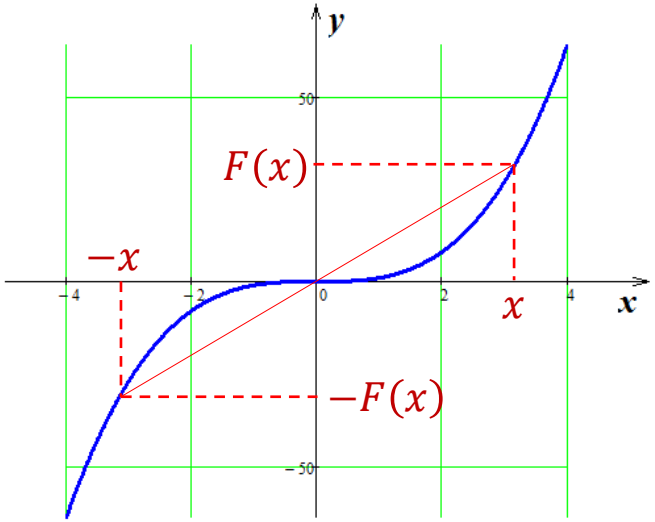


График симметричен относительно начала координат

© Пигарев А.Ю.

ПРОИЗВОДНАЯ

1

Производная – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

3

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad \textit{в частности} \quad (x)' = 1, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad \textit{в частности} \quad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \textit{в частности} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4

$$(k \cdot u)' = k \cdot u'$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

5

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u' \quad \textit{в частности} \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \quad \textit{в частности} \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u' \quad \textit{в частности} \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

6

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

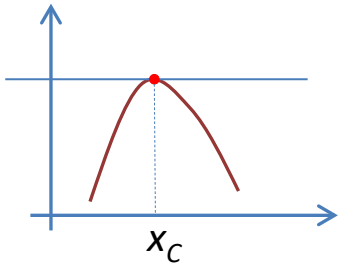
© Пигарев А.Ю.

МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

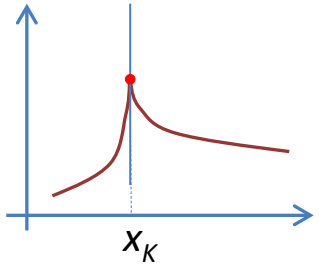
Если производная положительна, то функция возрастает: $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$.

Если производная отрицательна, то функция убывает: $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$.

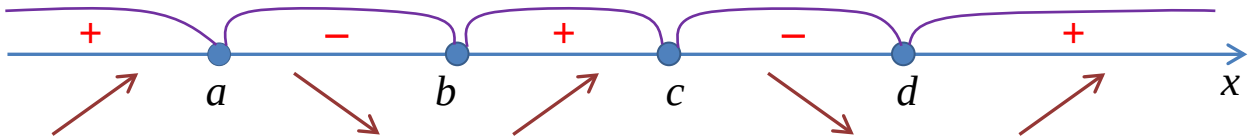
Стационарные точки - точки, в которых производная функции равна нулю:



Критические точки - точки, в которых функция определена и непрерывна, но производная не существует:



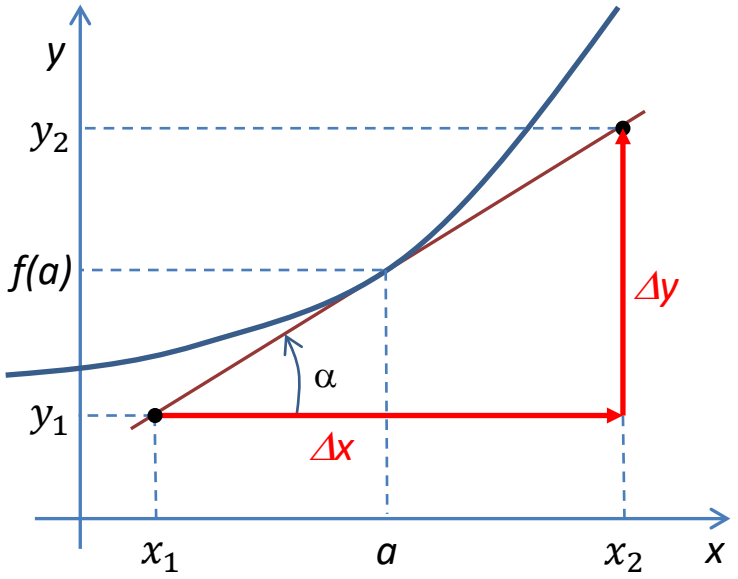
Точки экстремума - обобщенный термин для точек минимума и максимума.



a и ***c*** – точки максимума, ***b*** и ***d*** – точки минимума

© Пигарев А.Ю.

КАСАТЕЛЬНАЯ



Уравнение касательной:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

α – угол наклона касательной к оси X

$$f'(a) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha$$

$y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x = a$, если $\begin{cases} f'(a) = k \\ f(a) = ka + b \end{cases}$

$y = kx + b$ параллельна касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x = a$, если $f'(a) = k$

© Пигарев А.Ю.

ПЕРВООБРАЗНАЯ

Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$, если выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

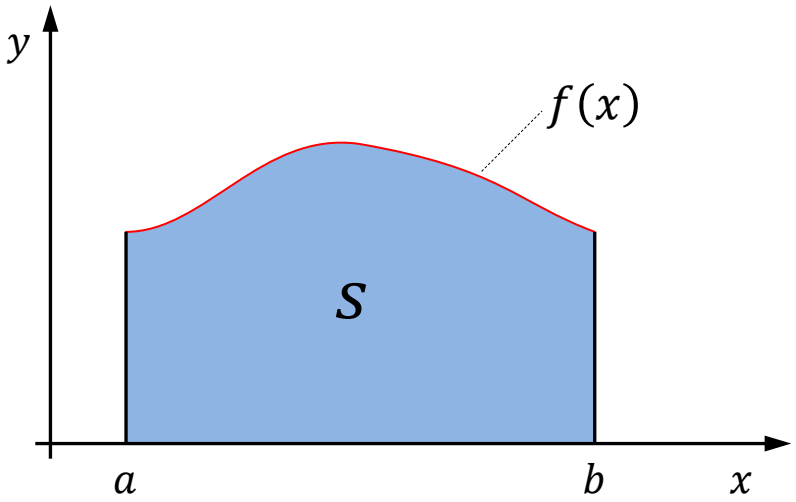
- Если $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$.
- Если F есть первообразная для f, а G – первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.
- Если F есть первообразная для f, а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf.
- Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, a и k – постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + a)$ есть первообразная для $f(kx + a)$.

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	x
$x^n\ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$

$f(x)$	$F(x)$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

© Пигарев А.Ю.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

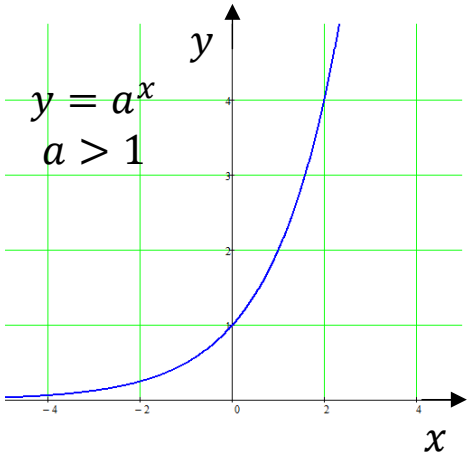
где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

© Пигарев А.Ю.

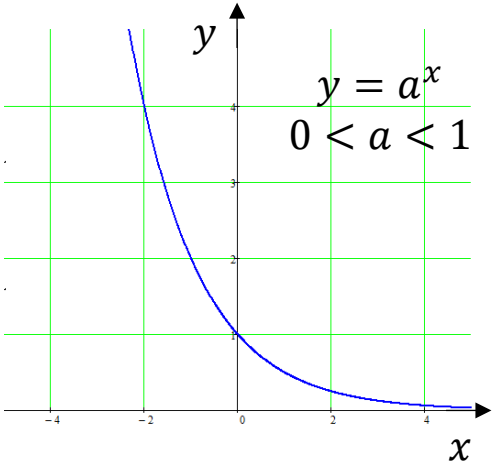
Свойства логарифмов
Рационализация неравенств
Показательная функция и логарифмы
Показательные неравенства
Логарифмические неравенства

© Пигарев А.Ю.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА



$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$$



$a > 1$

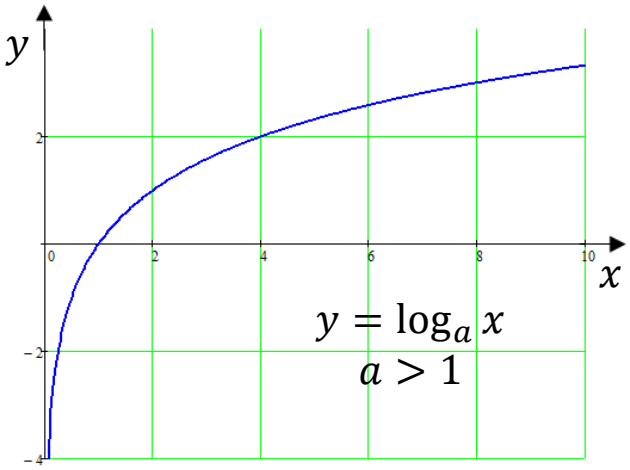
$$f(x) > \varphi(x)$$

$0 < a < 1$

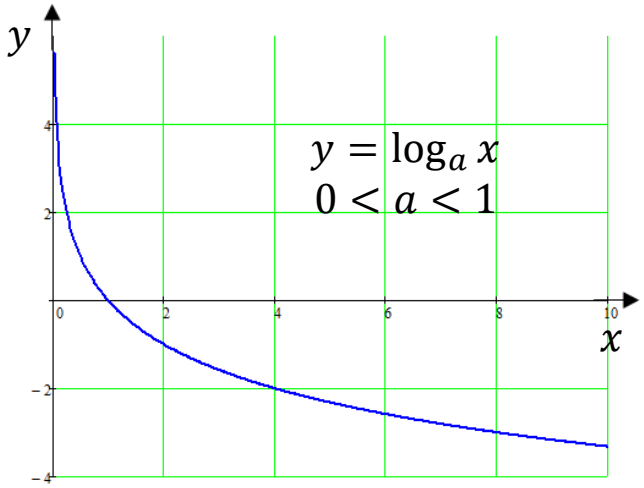
$$f(x) < \varphi(x)$$

© Пигарев А.Ю.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА



$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$$



$a > 1$ | $0 < a < 1$

логарифм убираем – знак неравенства оставляем

логарифм убираем – знак неравенства меняем на противоположный

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

меньшее из двух больше нуля

$$\begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

© Пигарев А.Ю.

РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ НЕРАВЕНСТВ

№	Исходное выражение	Выражение после замены
1	$\log_a B - \log_a C$	$\frac{B-C}{a-1}$
2	$\log_a B - 1$	$\frac{B-a}{a-1}$
3	$\log_a B$	$\frac{B-1}{a-1}$
4	$\log_a C - \log_b C$	$\frac{(b-a)(C-1)}{(a-1)(b-1)}$
5	$C^a - C^b$	$(C-1)(a-b)$
6	$C^a - 1$	$(C-1)\cdot a$
7	$B^a - C^a$	$(B-C)\cdot a$
8	$\lvert A\rvert - \lvert B\rvert$	$(A-B)(A+B)$
9	$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$A-B$
10	$\lvert A\rvert - \sqrt{B}$	$A^2 - B$

Иррациональное выражение можно рационализировать, когда только его знак имеет значение.
То есть, когда справа ноль, а слева рационализируемое выражение (логарифм, модуль, степень...) является общим множителем или делителем.

© Пигарев А.Ю.

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$
$a > 0, a \neq 1, b > 0$

1) $b^{\log_b a} = a$

2) $\log_a a = 1$

3) $\log_a 1 = 0$

4) $\log_a a^m = m$

5) $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

6) $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

7) $\log_c a^k = k \cdot \log_c a$

8) $\log_{c^n} a = \frac{1}{n} \log_c a$

9) $\log_{c^n} a^k = \frac{k}{n} \log_c a$

10) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

11) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a} = \frac{\log_m b}{\log_m a} \Rightarrow \log_n b \cdot \log_m a = \log_m b \cdot \log_n a \Rightarrow$$

$$n^{\log_n b \cdot \log_m a} = n^{\log_m b \cdot \log_n a} \Rightarrow b^{\log_m a} = a^{\log_m b}$$

© Пигарев А.Ю.

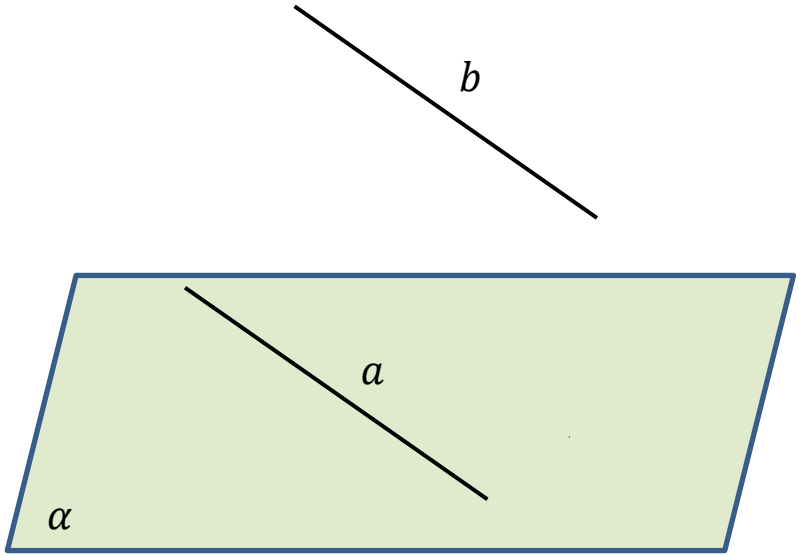
Параллельность и перпендикулярность
Фигуры вращения
Углы и расстояния
Стереометрия
Пирамиды
Призмы

© Пигарев А.Ю.

Параллельность прямой и плоскости
Перпендикулярность двух плоскостей
Параллельность и перпендикулярность
Перпендикулярность прямой и плоскости
Параллельность двух плоскостей
Теорема о трех перпендикулярах

© Пигарев А.Ю.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

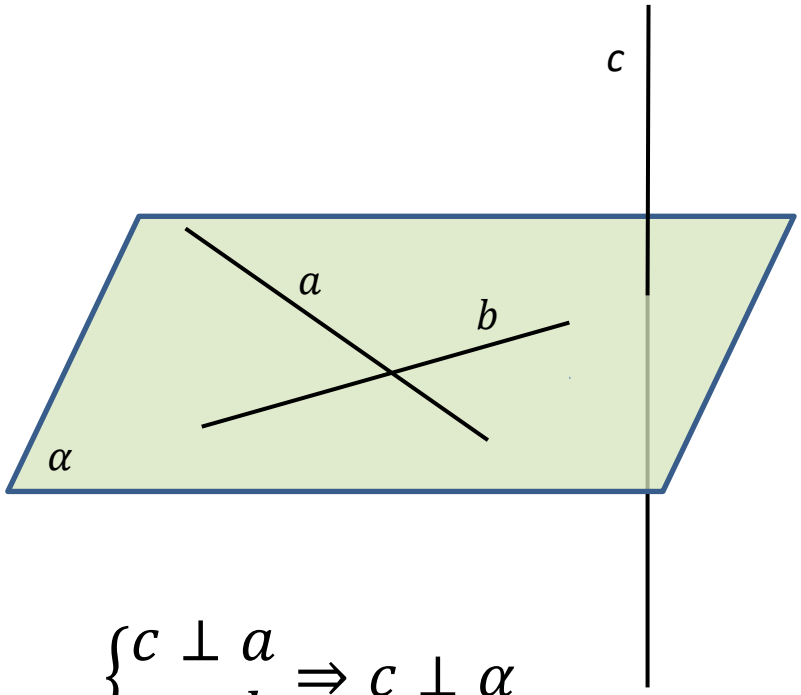


- ОПРЕДЕЛЕНИЕ
  Прямая параллельна плоскости, если не имеет с ней общих точек.
- ТЕОРЕМА
  Прямая параллельна плоскости, если параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

$$b \parallel a \Rightarrow b \parallel \alpha$$

© Пигарев А.Ю.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

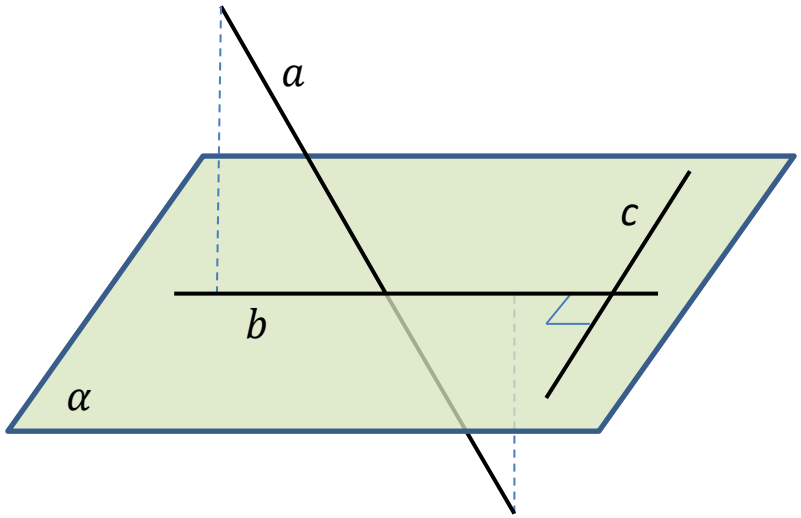


$$\begin{cases} c \perp a \\ c \perp b \end{cases} \Rightarrow c \perp \alpha$$

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ**
  Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.
- **ТЕОРЕМА**
  Если прямая перпендикулярна любым двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

© Пигарев А.Ю.

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



$$c \perp a \Leftrightarrow c \perp b$$

- Если прямая c, лежащая в плоскости α, перпендикулярна проекции b наклонной a на плоскость α, то она перпендикулярна и самой наклонной:

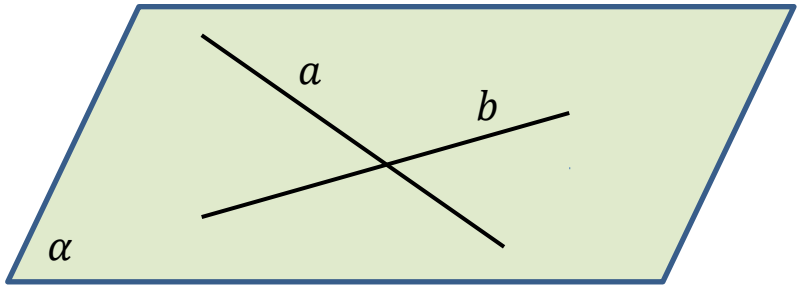
$$c \perp b \Rightarrow c \perp a$$

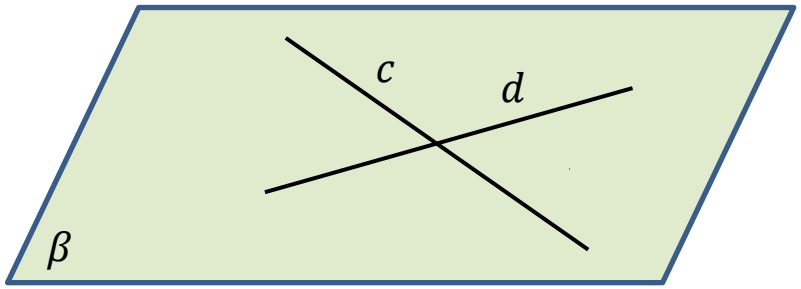
- Если прямая c, лежащая в плоскости α, перпендикулярна наклонной a к плоскости α, то она перпендикулярна и ее проекции b на плоскость α :

$$c \perp a \Rightarrow c \perp b$$

© Пигарев А.Ю.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



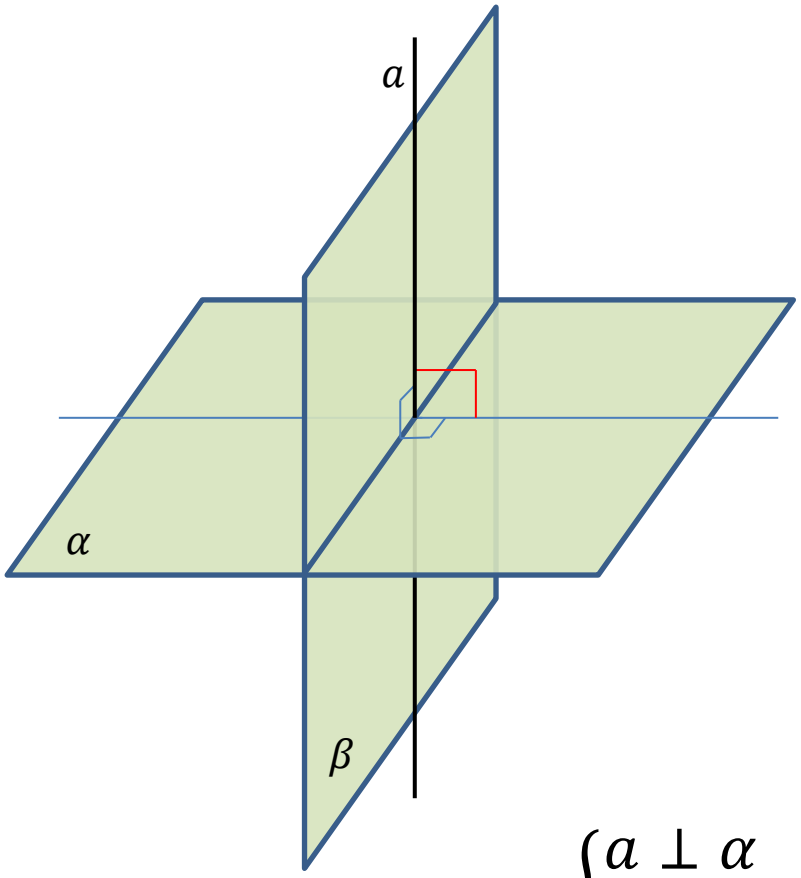


$$\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel d \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ**
  Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.
- **ТЕОРЕМА**
  Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

© Пигарев А.Ю.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

  Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°.

- **ТЕОРЕМА**

  Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

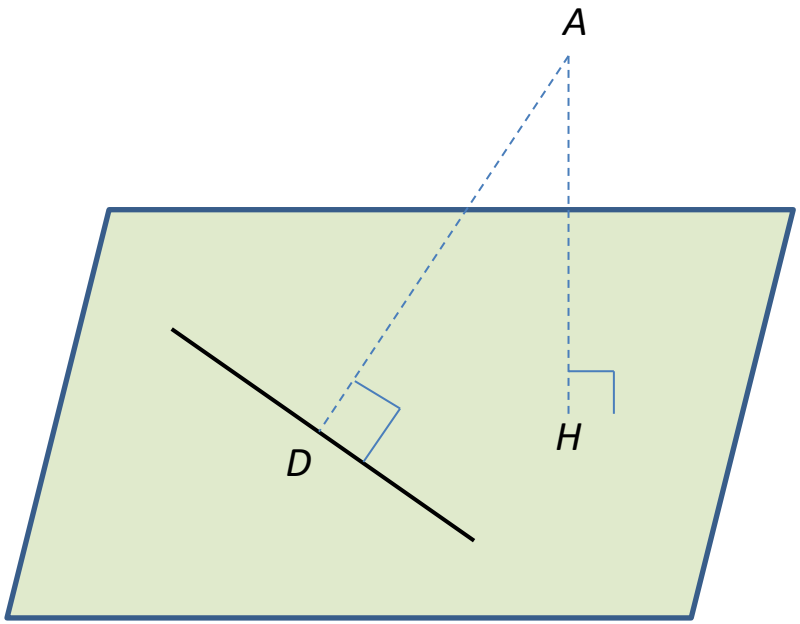
$$\begin{cases} a \perp \alpha \\ a \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

© Пигарев А.Ю.

Расстояние от точки до прямой и плоскости
Угол между плоскостями
Углы и расстояния
Угол между прямой и плоскостью
Расстояние между скрещивающимися прямыми
Угол между скрещивающимися прямыми

© Пигарев А.Ю.

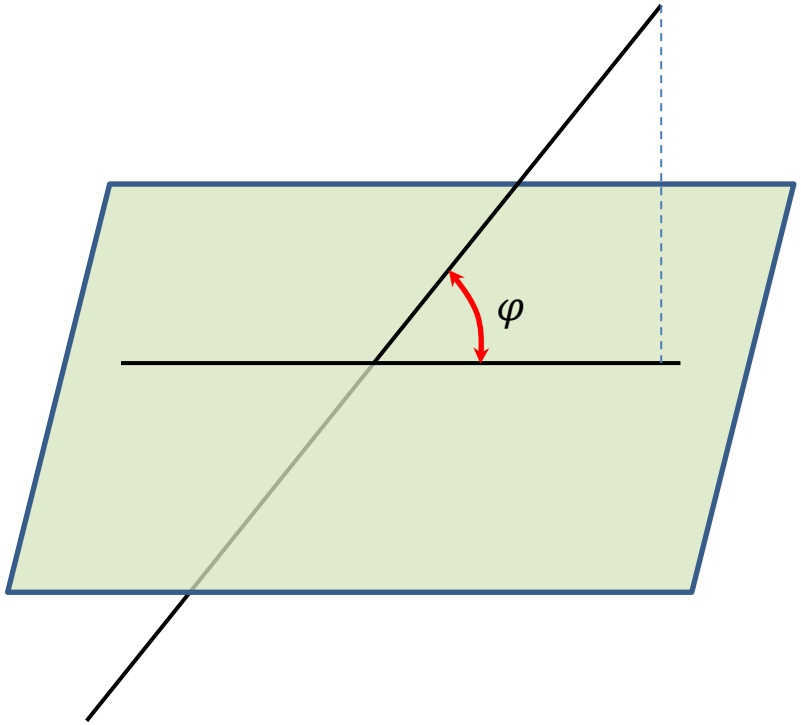
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



- Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую (*AD*).
- Расстояние от точки до плоскости – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость (*AH*).

© Пигарев А.Ю.

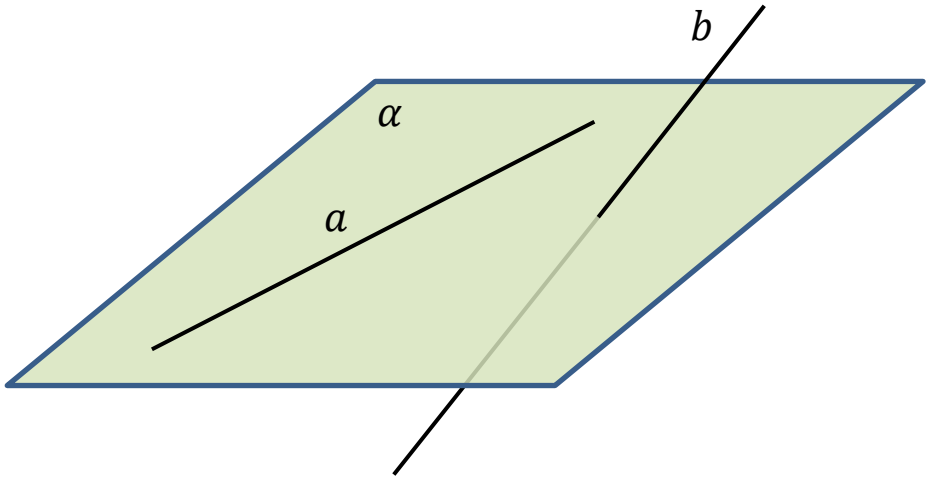
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

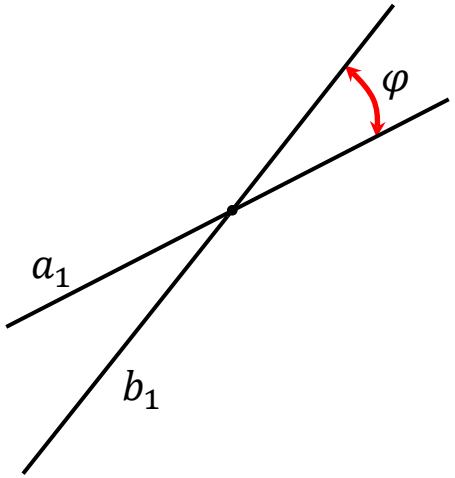


Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

© Пигарев А.Ю.

УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

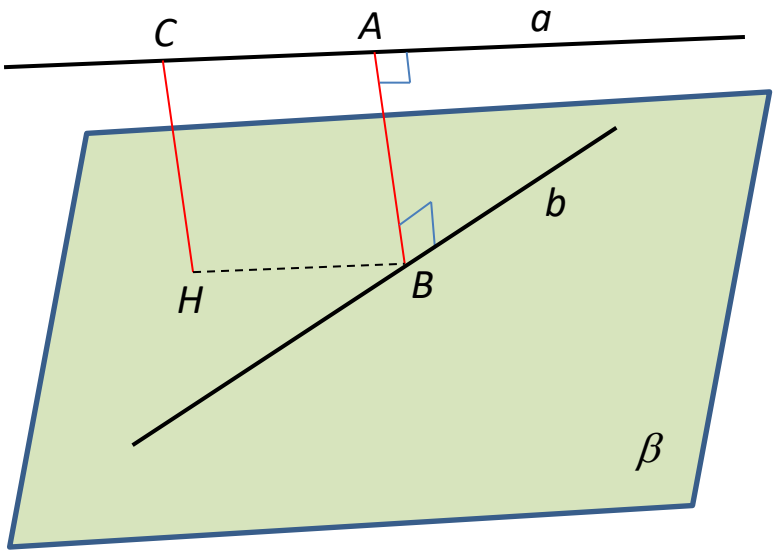




Угол между скрещивающимися прямыми a и b – –это угол между параллельными им пересекающимися прямыми: $\widehat{a, b} = \widehat{a_1, b_1}$, где $a_1 \parallel a, b_1 \parallel b$.

© Пигарев А.Ю.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

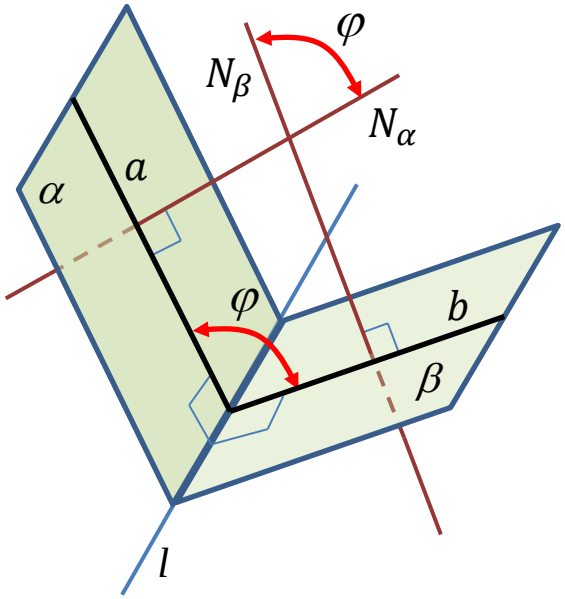


Расстояние между скрещивающимися прямыми a и b – длина отрезка AB, перпендикулярного как прямой a, так и прямой b.

Это расстояние равно расстоянию CH от любой точки C прямой a до плоскости β ($a \parallel \beta$), в которой лежит прямая b ($b \in \beta$).

© Пигарев А.Ю.

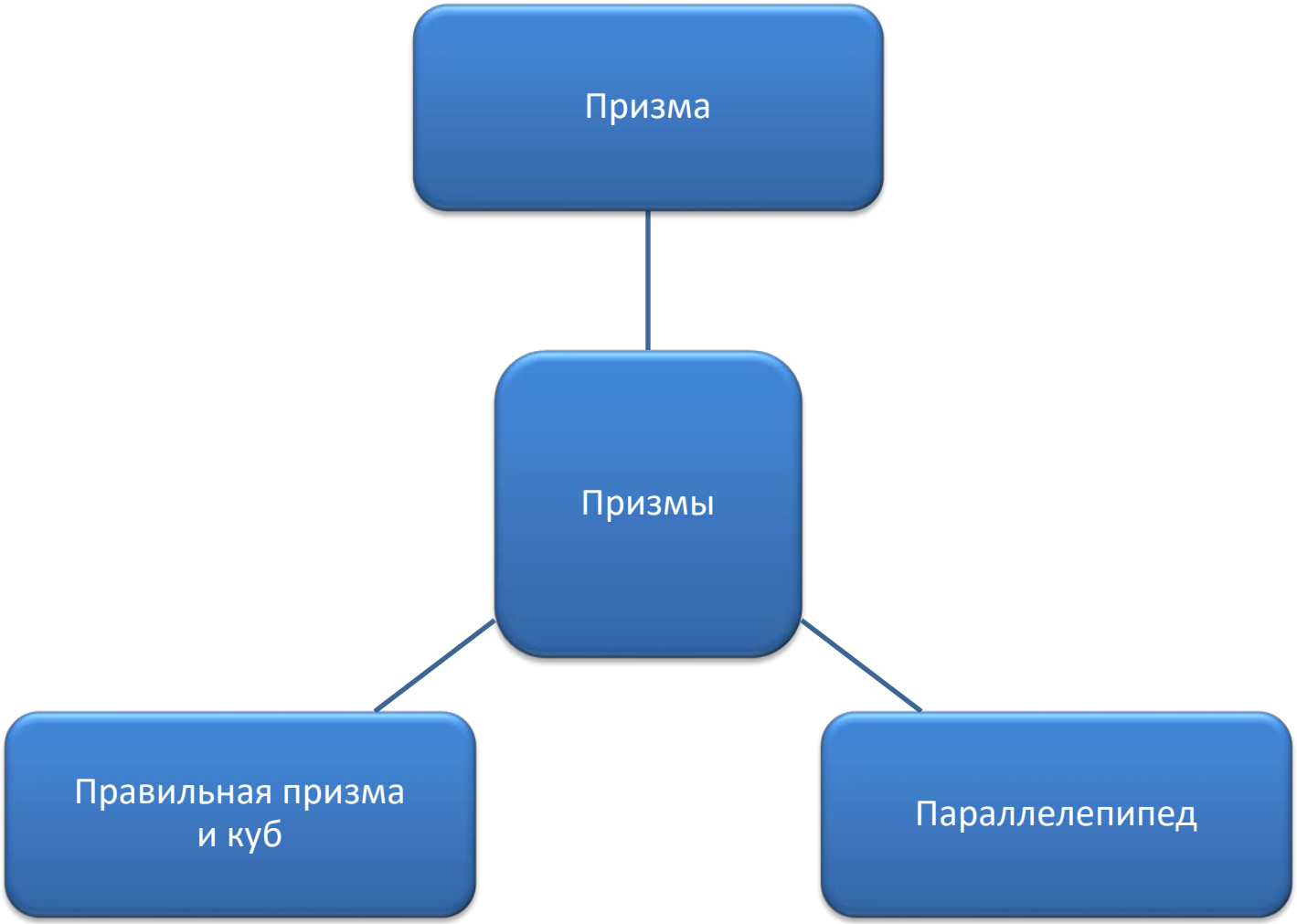
УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



Угол между плоскостями α и β – это угол φ между лучами a и b, лежащими в плоскостях α и β и перпендикулярными прямой пересечения плоскостей l: $a \perp l, b \perp l$.

Этот угол равен углу между нормалями (перпендикулярами) к плоскостям α и β: $\varphi = \widehat{N_\alpha N_\beta}$

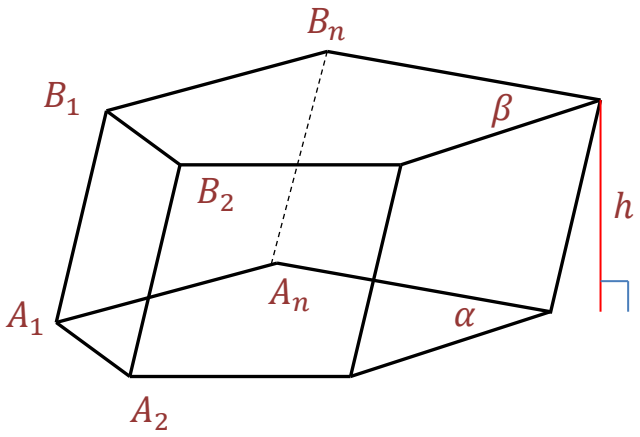
© Пигарев А.Ю.



© Пигарев А.Ю.

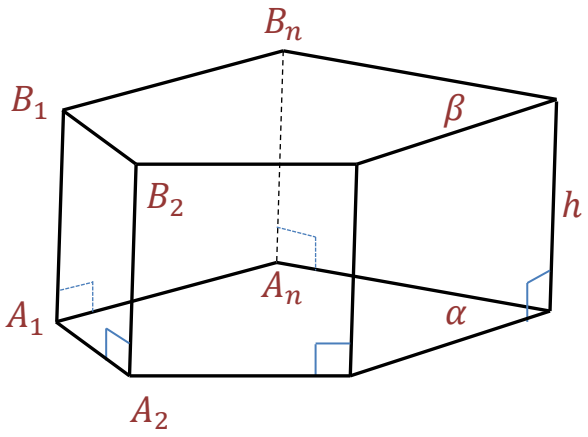
ПРИЗМА

Наклонная призма



Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ (оснований), расположенных в параллельных плоскостях ($\alpha \parallel \beta$), и n параллелограммов (боковых граней), называется призмой.

Прямая призма

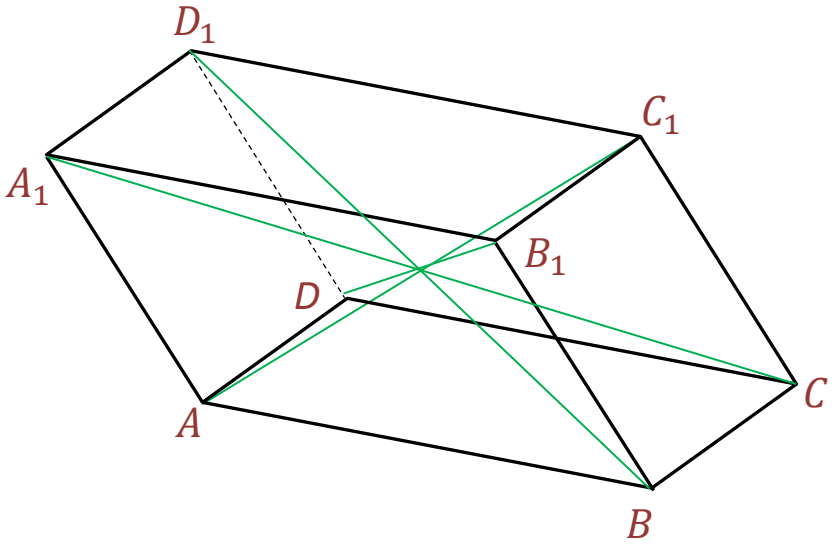


У прямой призмы боковые ребра перпендикулярны основаниям, а высота равна боковому ребру.

Объем призмы: $V = Sh$

© Пигарев А.Ю.

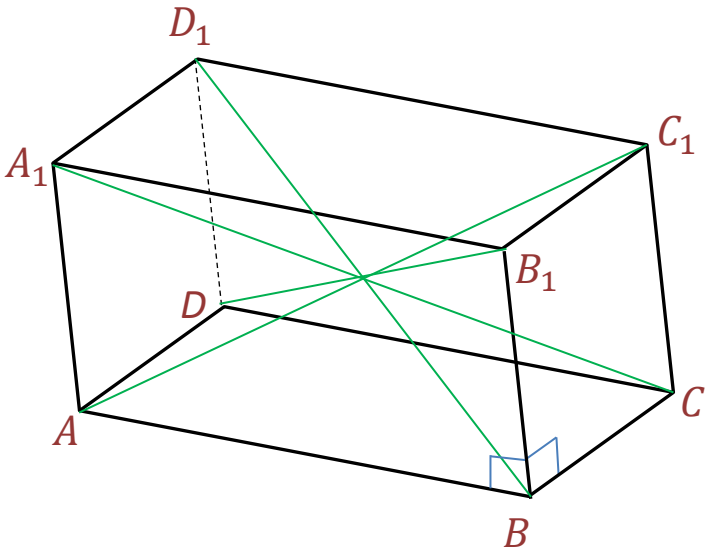
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



Параллелепипед – призма, основание которой параллелограмм.

- Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
- Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.



- Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

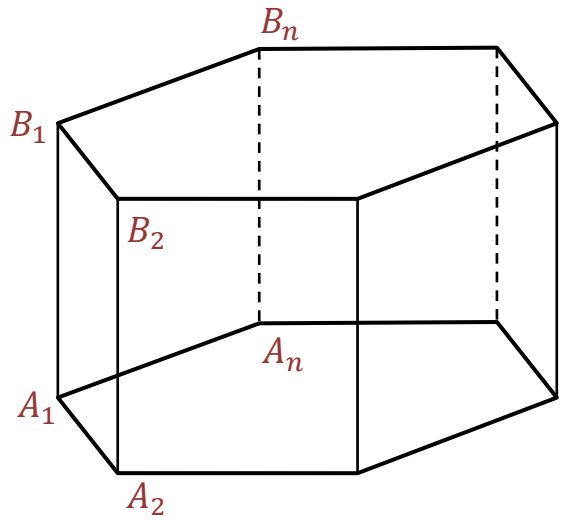
$$AC_1{}^2 = AB^2 + BB_1{}^2 + B_1C_1{}^2$$

- Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

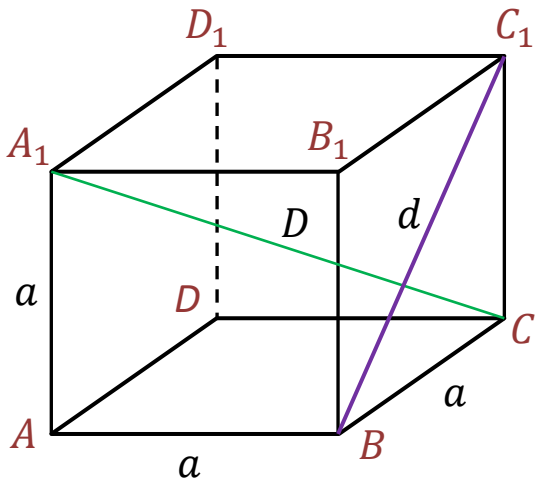
$$V = AB \cdot BB_1 \cdot B_1C_1$$

© Пигарев А.Ю.

ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА И КУБ



Правильная призма – прямая призма, основание которой – правильный многоугольник.



Куб – прямоугольный параллелепипед, все грани которого равные квадраты.

$$d = a\sqrt{2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$

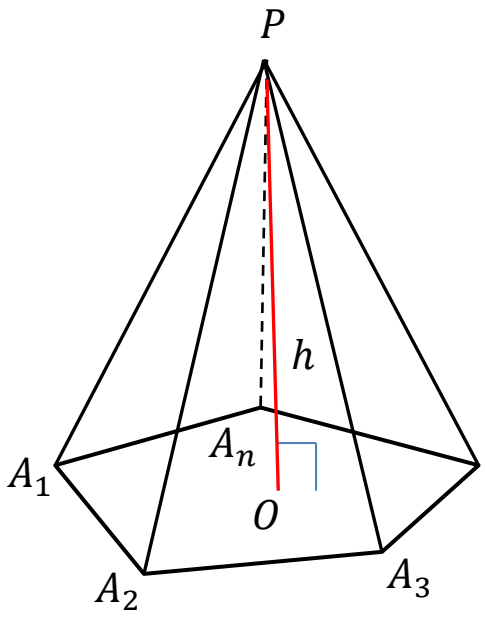
$$S = 6a^2 = 2d^2$$

$$V = a^3$$

© Пигарев А.Ю.

© Пигарев А.Ю.

ПИРАМИДА

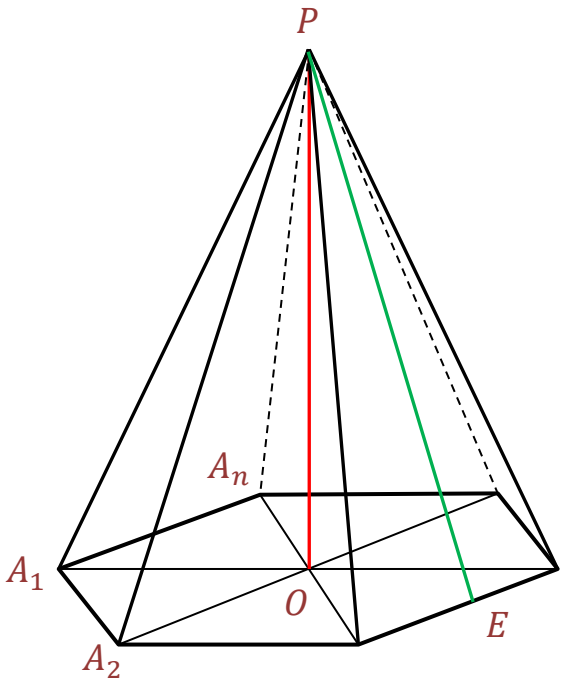


Многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – основание пирамиды.
Треугольники $A_1PA_2, A_1PA_2, \dots, A_nPA_1$ – боковые грани.
P — вершина пирамиды.
PO – высота пирамиды.

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3}hS$

© Пигарев А.Ю.

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА



Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой (***PO***).

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

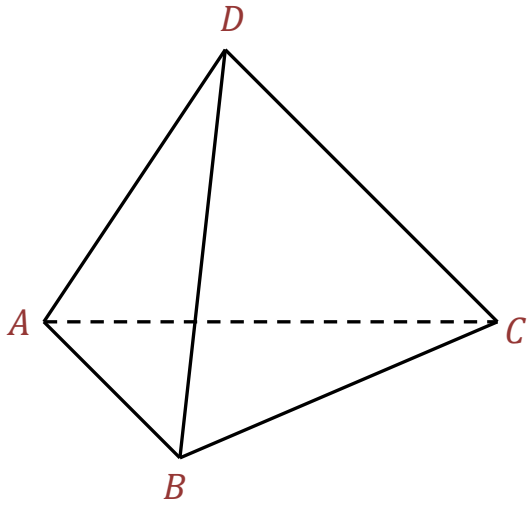
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой (***PE***).

© Пигарев А.Ю.

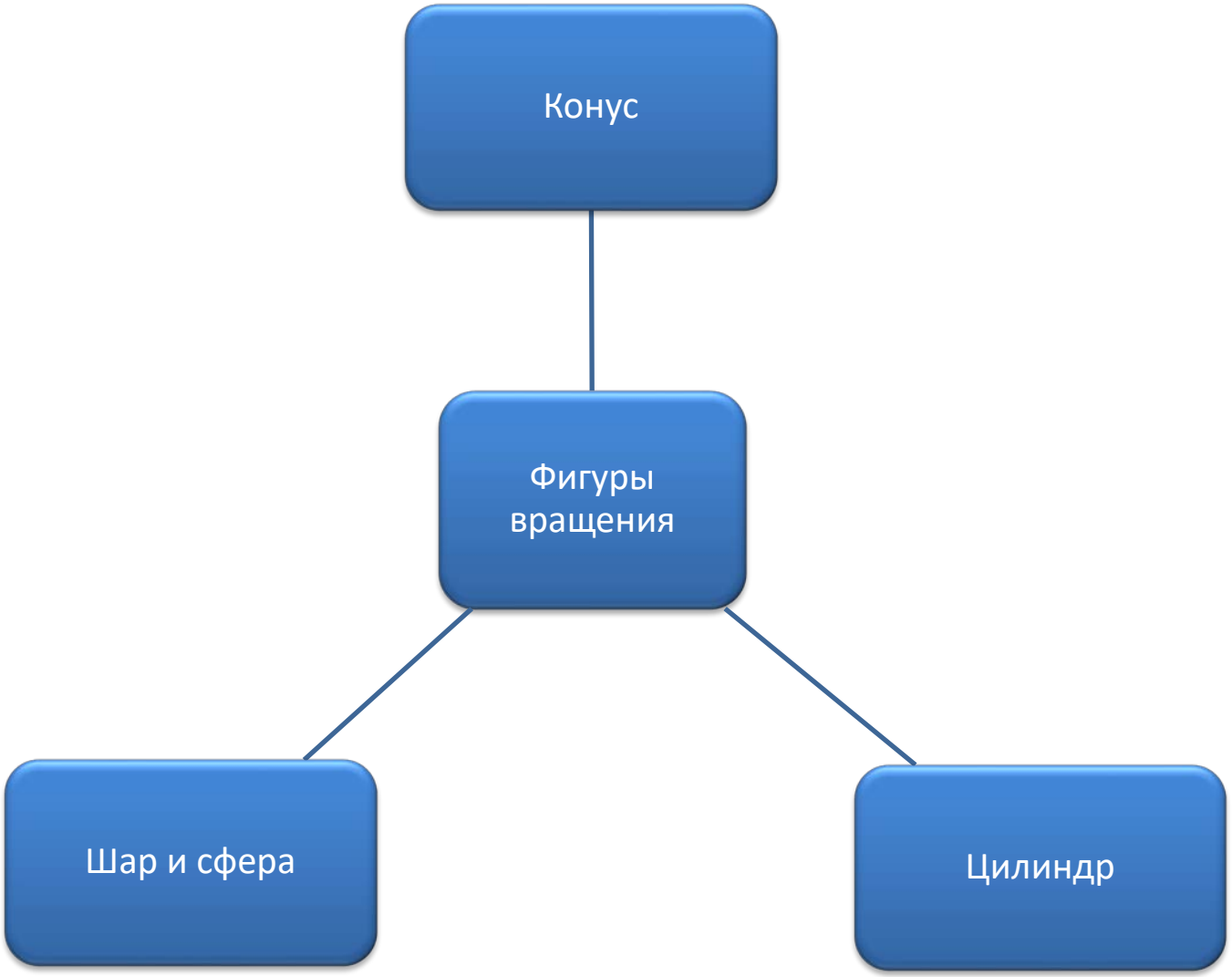
ТЕТРАЭДР

Тетраэдр – треугольная пирамида.

Правильный тетраэдр составлен из четырех равносторонних треугольников.

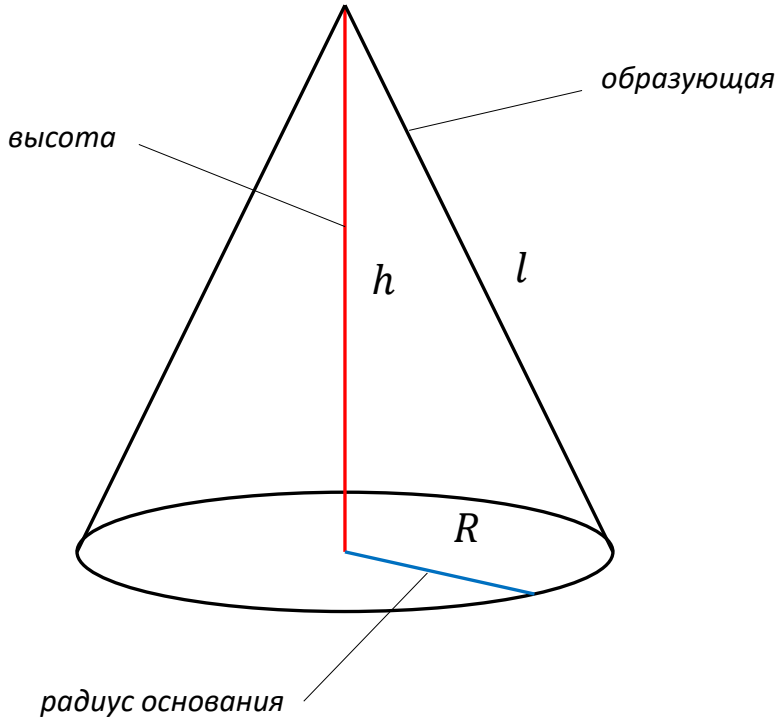


© Пигарев А.Ю.



© Пигарев А.Ю.

КОНУС



$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$

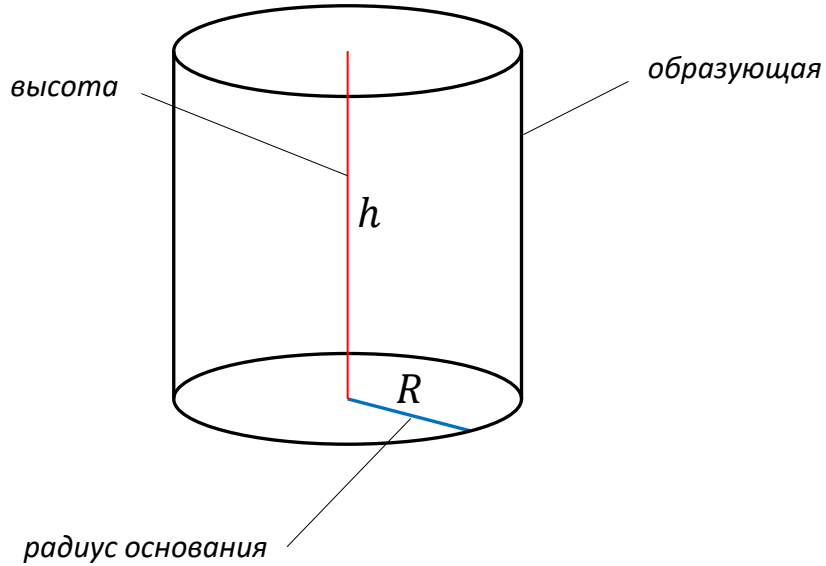
$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

$$V = \frac{1}{3} h S_{\text{осн}}$$

$$l^2 = h^2 + R^2$$

© Пигарев А.Ю.

ЦИЛИНДР



$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$$

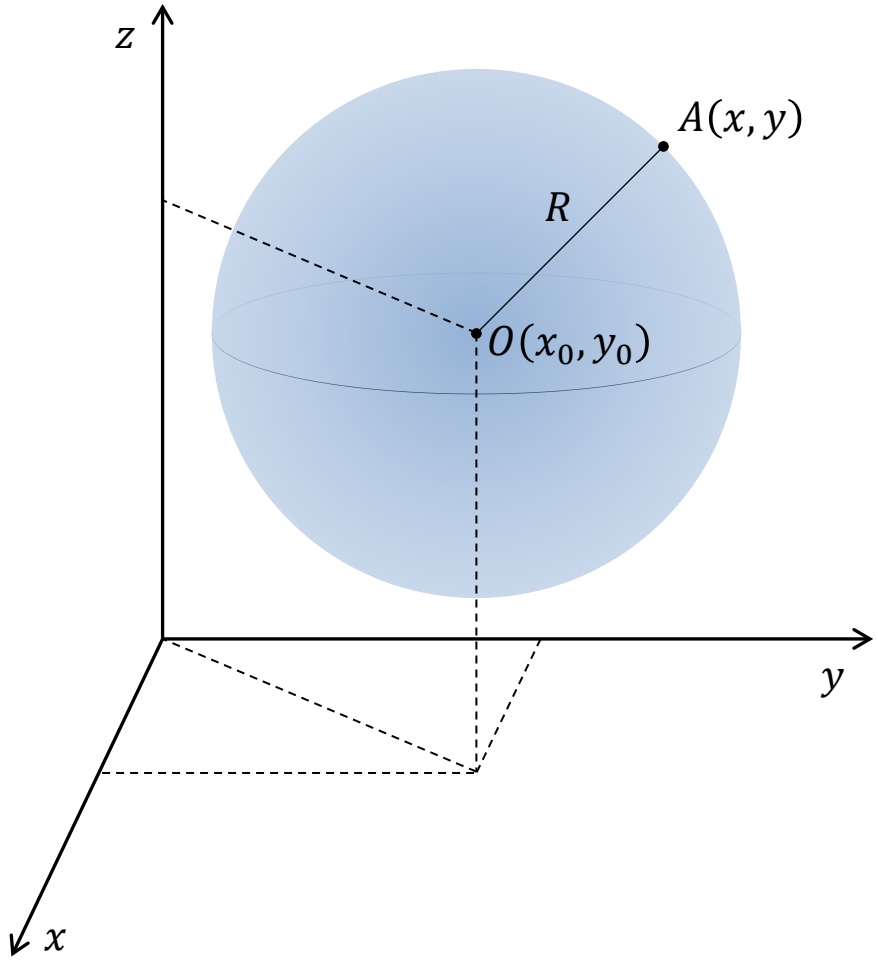
$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$V = hS_{\text{осн}} = \pi R^2 h$$

© Пигарев А.Ю.

ШАР И СФЕРА



Уравнение сферы

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Площадь сферы

$$S = 4\pi R^2$$

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

© Пигарев А.Ю.

Определения вероятности
Формулы полной вероятности и Бейеса
Теория вероятностей
Полная группа событий
Теоремы сложения и умножения вероятностей
Формулы комбинаторики

© Пигарев А.Ю.

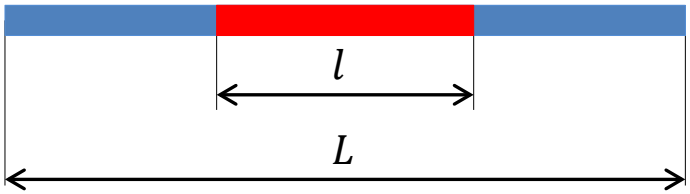
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов n, образующих полную группу:

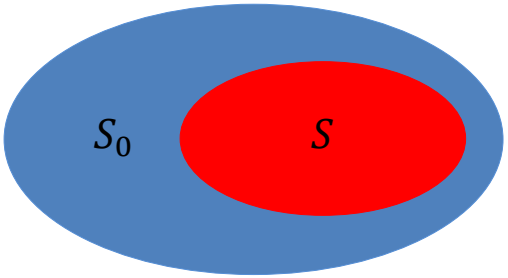
$$P(A) = \frac{m}{n}, 0 \leq P(A) \leq 1$$

- Вероятность невозможного события равна нулю.
- Вероятность достоверного события равна единице.

Геометрическая вероятность —вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.):



$$P = \frac{l}{L}$$



$$P = \frac{S}{S_0}$$

© Пигарев А.Ю.

ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Несовместные события $A_1, A_2, \dots A_n$ образуют полную группу, если наступление одного из них является достоверным событием:

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$$

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

© Пигарев А.Ю.

ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок:

$$P_n = n!$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

© Пигарев А.Ю.

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

События называют несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

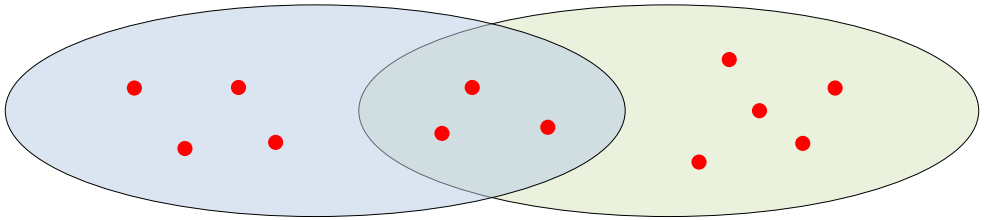
$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



© Пигарев А.Ю.

ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БЕЙЕСА

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)$$

Формула Бейеса
(для вычисления вероятности гипотезы, при условии, что событие A наступило)

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)}$$

© Пигарев А.Ю.